Vollständiger Lehrkurs

der

reinen Mathematik

von

L. B. Francoeur,
Professor der Mathematik an der Universität zu Paris, Mitgliede der philomatischen Gesellschaft, Ritter der Ehrenlegion u. s. w.

Nach der neuesten verbesserten und vermehrten Pariser Original-Ausgabe aus dem Französischen übersetzt, mit Anmerkungen und Zusätzen versehen

von

Dr. **Edmund Külp,**
Lehrer der Mathematik und Physik an der höhern Gewerbschule in Darmstadt.

Ersten Bandes zweites Buch,

enthaltend

die niedere Algebra.

Zweite Ausgabe.

Bern, Chur und Leipzig,
Verlag und Eigenthum von J. F. J. Dalp.
1843.

Haller'sche Buchdruckerei in Bern.

Cas.

Erstes Kapitel.

Von den algebraischen Rechnungsarten.

Allgemeine Begriffe.

§. 1. In der Arithmetik hat man zum Zweck, verschiedene Zahlen nach gewissen Regeln mit einander zu verbinden; in der Algebra dagegen ist nicht das numerische Resultat, sondern vielmehr die in der Rechnung vorkommende Verbindungsweise einer jeden Zahl die Hauptsache. Die Auflösung aller zu einer und derselben Gattung gehörigen, nur andere Bestimmungsstücke enthaltenden Aufgaben erfordert die Ausführung ähnlicher Rechnungen mittelst der gegebenen Stücke. Die Interessen eines Kapitals z. B. werden dadurch gefunden, daß man das Kapital, die Zeit und den hunderten Theil des Zinsfußes (Zinsen vom Kapital 100 in der Zeiteinheit) mit einander multiplicirt. Die Algebra beschäftigt sich also mit der Aufsuchung der bei jeder Aufgabe vorzunehmenden Rechnungen. Um dahin zu gelangen, stellt man die gegebenen Größen durch die Buchstaben $a, b, c\ldots$, die alle möglichen Zahlen zu bezeichnen sehr geeignet sind, vor, damit man im Endresultate, durch alle Entwicklungen und Rechnungsoperationen hindurch, die Verbindungsweise einer jeden Zahl erkennen könne.

Suchen wir z. B. die Zahl, deren dreifaches Produkt gleich 100 plus der Hälfte dieser Zahl ist; wir schließen folgendermaßen: 3 mal die Unbekannte gleich 100 plus der Hälfte der Unbekannten . . . . $3x = 100 + \frac{1}{2}x$

Zieht man die Hälfte der Unbekannten auf beiden Seiten ab, so hat man 3 mal die Unbekannte

weniger ihrer Hälfte gleich 100 oder $\frac{5}{2}$ mal die Unbekannte gleich 100 . . . . $3x - \frac{1}{2}x = 100$

Wird auf beiden Seiten endlich durch $\frac{5}{2}$ dividirt (Arithmetik §. 5), so ist die Unbekannte gleich $\frac{2}{5}$ von 100 oder gleich 40 . . . . $\frac{5}{2}x = 100$ $x = \frac{2}{5} . 100 = 40$

Der Algebraist stellt die Unbekannte durch x vor und drückt, wie man so eben gesehen, mit Hülfe der Zeichen die verschiedenen Theile seiner Schlußart aus. Setzt er a für die Zahl 100, so hat er $3x = a + \frac{1}{2}x$, $3x - \frac{1}{2}x = a$, oder $\frac{5}{2}x = a$, woraus $x = \frac{2}{5}a$.

Die Unbekannte, deren dreifaches Produkt gleich ihrer Hälfte plus einer gegebenen Größe ist, beträgt also $\frac{2}{5}$ dieser Größe, von welcher Art letztere auch sein mag.

Ueberdem kann die Art, Lehrsätze in der Algebra zu beweisen, sehr verschieden von der in der Arithmetik sein. Will man einen Satz beweisen, so nimmt man in der Arithmetik irgend ein numerisches Beispiel, verfährt dann dergestalt, daß der zu beweisende Satz, nicht blos für das specielle Beispiel, sondern auch für jedes andere hieraus sich ergibt. Auf ein specielles Beispiel also wendet man eine allgemeine Schlußfolge an. In der Algebra dagegen nimmt man ein aus allgemeinen Symbolen, die alle möglichen Zahlen vorstellen, bestehendes Beispiel, schließt dann auf besondere Weise fort, wobei die Verbindungen rein mechanischer Art sein können. Alles dies wird in der Folge klarer werden.

§. 2. Vereinigen wir uns dahin, die bekannten Größen durch die Buchstaben $a, b, c \ldots$ vorzustellen; es sind also die gegebenen Zahlen, die uns als Grundlage bei unsern Schlußarten dienen, und die jeden beliebigen Werth hernach annehmen können. Ist s die Summe der vier Zahlen a, b, c und d, so schreiben wir $s = a + b + c + d$. $s = a + a + a + a$ reducirt sich auf $s = 4 \times a$, oder einfacher $= 4a$, wenn man das Zeichen der Multiplication, das hier unnöthig ist, wegläßt.

Die Ziffer 4 heißt der **Coefficient**. Soll die Zahl a 2, 5, 7... $n$mal genommen werden, so schreibt man $2a$, $5a$, $7a \ldots na$. Eben so bezeichnet man durch a^2, a^5, $a^7 \ldots a^n$, daß a 2, 5, 7 .... $n$mal als Factor genommen werden soll, nämlich aa, $aaaaa$ u. s. w.

Anmerkung. Man muß sich wohl hüten, die Exponenten mit den Coefficienten, a^4 z. B. mit $4a$, zu verwechseln. Die Ex-

ponenten zeigen die wiederholte Multiplication einer und derselben Größe mit sich selbst an, während die Coefficienten angeben, wie oft die Größe auf dem Wege der Addition genommen wird. $a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$, $4a = a + a + a + a$; stellt a die Zahl 5 vor, so ist $a^4 = 625$, und $4a = 20$.

Jede Größe, die von einer andern durch die Zeichen + oder — abgesondert ist, wird Glied oder Theil genannt; das Monom (eingliedrige oder einnamige Größe) hat nur ein Glied; das Binom (zweigliedrige oder mehrnamige Größe) hat zwei Glieder, wie $a+b$, $ac-4ab$; das Trinom hat drei Glieder, wie $a+b-c$, $ad-4ab-2bc$; und allgemein nennt man Polynom (viergliedrige oder vielnamige Größen) solche Größen, die aus mehrern Gliedern bestehen.

Anmerkung. Zu bemerken ist, daß man die Monome auch incomplexe und die Polynome complexe Größen nennt.

Das Trinom $a-b-c$ zeigt, daß, nachdem b von a weggenommen ist, man noch c vom Reste abziehen soll; was auf $a-(b+c)$ hinaus geht. $a-b-b$ ist offenbar so viel wie $a-2b$; ebenso $a-b-3b-2b = a-6b$.

Anmerkung. Derjenige Theil der Algebra, der mit den Buchstaben als Zahlzeichen rechnen lehrt, wird passend allgemeine Arithmetik oder auch — obgleich unpassend — Buchstabenrechnung genannt.

Von der Reduction, Addition und Subtraction.

§. 3. Man nennt Reduction die algebraische Operation, durch welche man mehrere Glieder in ein einziges vereinigt. In solchem Falle aber dürfen diese Glieder nur rücksichtlich ihrer Coefficienten von einander verschieden sein, sie dürfen nur einerlei Buchstaben, mit denselben Exponenten versehen, enthalten. $3a-2ab-b$, $3a^2-2a$, $5a^3b^2+2a^2b^3-3b^2$ sind nicht reducirbare Ausdrücke. Man sieht leicht ein, daß

$$3abc^2 - abc^2 - bc^3 + 2bc^3 + a^2d^2 = 2abc^2 + bc^3 + a^2d^2,$$
$$2a - 3b + a - c + 3b = 3a - c,$$
$$3b + 2ac - 5b - 3ac + ac + d = d - 2b.$$

Ueberhaupt nimmt man vorerst zwei ähnliche Glieder, die Reduction findet dann blos mit ihren Coefficienten statt, d. h. man addirt diese Coefficienten, wenn sie einerlei Vorzeichen haben, und zieht sie von einander ab, wenn solche verschieden sind; dem Resultate gibt man im ersten Falle das gemeinschaftliche Vorzeichen, und das Zeichen des größern Coefficienten im zweiten Falle. Die Buchstaben nebst ihren Exponenten bleiben übrigens ungeändert.

Hat ein Glied keinen Coefficienten vor sich, so wird immer die Einheit als solcher darunter verstanden (Arithmetik §. 54); so ist z. B. $b = 1b$, $ac = 1 \cdot ac$.

Eigentlich gibt es in der Algebra weder eine Addition noch eine Subtraction, sondern eine bloße Reduction, wenn solche möglich ist. Die Addition und Subtraction bleiben in $a + b$ und $a - b$ noch auszuführen übrig.

In dem nebenstehenden Beispiele also hat man keine andere Schwierigkeit als die, welche die Reduction mit sich bringt, nachdem man dem ersten Gliede jedes Trinoms das Zeichen $+$ beigefügt denkt.

$$\begin{array}{r} 3a^2 + 5bc - 2c^2 \\ 7a^2 - 3bc + 4d \\ a^2 - 4bc + 2c^2 \\ \hline 11a^2 - 2bc + 4d \end{array}$$

§. 4. Wir wollen $b-c$ von a abziehen. Es ist gewiß, daß die gesuchte Differenz nicht geändert wird, wenn man c diesen beiden Größen hinzufügt: $b-c$ wird demnach in b, und a in $a+c$ umgewandelt; zieht man nun b von $a+c$ ab, so hat man $a-(b-c) = a + c - b$.

Man erhält in der That (Arithm. §. 4) a, wenn $a+c-b$ zu $b-c$ addirt wird. Um also ein Polynom abzuziehen, muß man alle seine Zeichen ändern und die möglichen Reductionen vornehmen. Hier einige Beispiele:

$$\begin{array}{r} 4ab - 3bc \\ -(2ab - 6bc) \\ \hline 4ab - 3bc \\ -2ab + 6bc \\ \hline 2ab + 3bc \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4ab - 3c^2 + bc \\ -(ab - c^2 - 2bc) \\ \hline 4ab - 3c^2 + bc \\ -ab + c^2 + 2bc \\ \hline 3ab - 2c^2 + 3bc \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5a^2 - 3ac \\ -(2a^2 - 3ac) \\ \hline 5a^2 - 3ac \\ -2a^2 + 3ac \\ \hline 3a^2 \end{array}$$

Zu bemerken ist, daß wenn das erste Glied ohne Vorzeichen ist, es mit dem Zeichen $+$ gedacht werden muß, um bei diesem Gliede,

wie bei den übrigen, die oben angegebene Regel in Anwendung zu bringen. Dieselbe Bemerkung findet aus gleichem Grunde bei der Multiplication und Division statt.

Von der Multiplication.

§. 5. Die Multiplication der Monome bietet keine Schwierigkeit dar. Denn es sei $4ab \times 5cd$; ändert man die Ordnung der Factoren, so hat man $4 \cdot 5ab \cdot cd$ oder $20abcd$. Sind Exponenten vorhanden, wie $a^2 \times a^3$, so findet man, nach den ersten Principien, $aa \times aaa$ oder $aaaaa = a^5$, d. h. man hat die Exponenten 2 und 3 addirt. Ebenso ist $8a^2b^3 \times 4a^5b = 32a^7b^4$. *Ueberhaupt werden Monome mit einander multiplicirt, wenn man ihre Coefficienten multiplicirt, die Exponenten derselben Buchstaben addirt, und die verschiedenen Buchstaben endlich nebeneinander schreibt.* Man legt den Exponenten 1 denjenigen Buchstaben bei, welche keinen besitzen.

Wir wollen jetzt $a+b$ mit $c+d$ multipliciren, was man durch $(a+b)\times(c+d)$ andeutet. Es ist einleuchtend, daß, um $a+b$ so vielmal, als Einheiten in $c+d$ vorkommen, zu wiederholen, man $a+b$ vorerst $c$mal, darauf $d$mal zu nehmen, und diese Resultate dann zu addiren habe. Um $a+b$ aber $c$mal zu nehmen, muß man a und b einzeln mit c multipliciren, dergestalt daß $(a+b)\times c = ac + bc$, $(a+b)\times d = ad + bd$, was $ac+bc+ad+bd$ als Totalprodukt gibt.

$$\begin{array}{r} a + b \\ c + d \\ \hline ac + bc \\ + ad + bd \end{array}$$

Multipliciren wir nun $a-b$ mit c. Nimmt man das Produkt von a mit c, d. h. ac, so hat man c mal die Größe a addirt; nun soll aber nicht a, sondern $a-b$ mit c multiplicirt werden; man hat also bei jeder Addition von a eine um b Einheiten zu große Zahl genommen, das Produkt ac muß hiernach um die Größe b, so viel mal genommen, als die Zahl a es wurde, oder die Zahl c anzeigt, verringert werden. Ziehen wir daher bc von ac ab, so erhalten wir $(a-b)\times c = ac - bc$. Soll $a-b$ mit $c-d$ multiplicirt werden, so verrichtet man Anfangs die vorige Rechnung. Nun soll aber $a-b$ nicht $c$mal, sondern $(c-d)$ mal genommen werden; man hat also die Größe $(a-b)$ um $d$mal zu viel genommen; von dem vorhergehenden Produkte $ac-bc$ muß man daher die Produkte von $a-b$ mit d, oder

$$\begin{array}{r} a - b \\ c - d \\ \hline ac - bc \\ - ad + bd \end{array}$$

$ad - bd$ abziehen, was $(a - b) \times (c - d) = ac - bc - ad + bd$ gibt.

Die Multiplication jedes Polynoms läßt sich stets auf diesen letztern Fall, wenn man durch a und c die Summe der additiven Glieder jedes Factors, durch b und c die ihrer negativen Glieder vorstellt, zurückführen; sollen dann die Werthe von ac, bc.... angegeben werden, so hat man wieder den ersten Fall. Betrachtet man die eben gemachten Entwicklungen näher, so sieht man, daß jedes Glied des Multiplicands mit jedem einzelnen Gliede des Multiplicators multiplicirt worden ist; überdem, daß das Produkt das Zeichen $-$, oder das Zeichen $+$ erhielt, je nachdem die eingliedrigen Partialfactoren verschiedene oder gleiche Zeichen hatten.

Hieraus schließen wir, daß das Produkt von zwei Polynomen gefunden wird, indem man successive, nach den für die Monome gegebenen Regeln, alle Glieder des einen mit jedem Gliede des andern multiplicirt; wobei jedes Partialprodukt negativ wird, wenn seine Factoren entgegengesetzte Zeichen, dagegen positiv ist, wenn sie einerlei Zeichen haben (beide $+$ oder beide $-$). Hat das erste Glied kein Vorzeichen, so wird immer $+$ als solches darunter verstanden (§. 4).

Anmerkung. Man sagt gewöhnlich, die Multiplication hat vier Regeln, nämlich die Regel der Coefficienten, die der Buchstaben, die der Exponenten und die Regel der Zeichen. Die drei ersten sind bei den Monomen angeführt worden, die vierte wird folgendermaßen ausgedrückt: $+ \times + = +$, $+ \times - = -$, $- \times + = -$, $- \times - = +$.

Dem an die algebraische Sprache nicht gewöhnten Ohre mag der Ausdruck $- \times -$ gibt $+$ befremdend erscheinen. Der hierbei entstehende Zweifel liegt allein in der Unrichtigkeit der Sprache; denn es ist ungereimt, ein Zeichen mit einem Zeichen multipliciren zu wollen. Keineswegs darf man aber den hier gebrauchten Ausdrücken einen streng wörtlichen Sinn unterlegen; sie sind nur deshalb dunkel, weil man, der leichten Anwendung halber, dem Bedürfnisse sich kurz zu fassen, die Richtigkeit der Aussage aufgeopfert hat. Man multiplicirt also nicht $-$ mit $-$, selbst nicht $-b$ mit $-d$, wohl aber $a-b$ mit $c-d$; die genaueste Schlußfolge führt so zu dem oben gegebenen

Satze. Kurz, man sollte das in Frage stehende Prinzip nicht die Regel der Zeichen, sondern vielmehr die Regel der Multiplication der Polynome nennen.

§. 6. Hier stehen einige Multiplications-Beispiele:

$$\begin{array}{l} a + 3c - d \\ 2a - d \\ \hline 2a^2 + 6ac - 2ad \\ -ad - 3cd + d^2 \\ \hline 2a^2+6ac-3ad-3cd+d^2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2a + bc - 2b^2 \\ 2a - bc + 2b^2 \\ \hline 4a^2 + 2abc - 4ab^2 \\ -2abc - b^2c^2 + 2b^3c \\ +4ab^2 + 2b^3c - 4b^4 \\ \hline 4a^2-b^2c^2+4b^3c - 4b^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ +ab + b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} a^2 + 2ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ +a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab \\ -ab - b^2 \\ \hline a^2 - b^2 \end{array}$$

Vorstehende Beispiele liefern uns interessante Folgerungen:

I. Das Quadrat von $(a+b)$ ist $a^2 + 2ab + b^2$. (Arithmetik §. 61.)

II. Der Cubus von $(a+b)$ ist $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. (Arithmetik §. 67.)

III. Aus $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ geht hervor, daß die Summe zweier Größen, mit ihrer Differenz multiplicirt, die Differenz ihrer Quadrate als Produkt gibt. $(7+5) \times (7-5) = 7^2 - 5^2$, oder $12 \times 2 = 49 - 25 = 24$.

Wir zerlegen a in zwei beliebige Theile, wird der eine durch $\frac{1}{2}a - x$ dargestellt, so ist der andere $\frac{1}{2}a + x$, und das Produkt ist $\frac{1}{4}a^2 - x^2$; letztere Größe ist kleiner als $\frac{1}{4}a^2$, so lange x nicht Null wird. Läßt man also den einen Theil der Zahl a von Null an zunehmen, so wird der andere kleiner und das Produkt größer; geht der erste Theil in $\frac{1}{2}a$ über, so ist das Produkt gleich dem Quadrat dieser Hälfte und erreicht seinen größten Werth, dergestalt, daß es wieder abnimmt, wenn der erste Theil zu wachsen fortfährt.

Diese Sätze werden besonders zur Abkürzung der Rechnungen gebraucht. So z. B. sieht man im zweiten Exempel bald, daß hier das Produkt von $2a + (bc - 2b^2)$ mit $2a - (bc - 2b^2)$ verlangt wird; man muß demnach die Differenz der Quadrate von $2a$ und $(bc - 2b^2)$ oder $4a^2 - (bc - 2b^2)^2$ finden. Die erste unserer Regeln

gibt nun $(bc - 2b^2)^2 = b^2c^2 - 4b^3c + 4b^4$; das verlangte Produkt ist also $4a^2 - b^2c^2 + 4b^3c - 4b^4$.

IV. Man findet, daß $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + b^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2$; wird $2abcd$ hinzu addirt und wieder abgezogen, so wird das Produkt auf $(ac \pm bd)^2 + (ad \mp bc)^2$ gebracht. Aus dieser merkwürdigen Eigenschaft geht hervor, daß das vorgelegte Produkt auf zweierlei Art in zwei Quadrate zerlegbar ist. Also $(7^2 + 2^2)(10^2 + 4^2) = 6148$, eine Zahl, die mit $(70 \pm 8)^2 + (28 \mp 20)^2$ gleichgeltend ist, folglich 6148 in $78^2 + 8^2$ und $62^2 + 48^2$ zerlegbar.

V. Offenbar ist $(a-b)^2 + 2ab > 2ab$, oder $a^2 + b^2 > 2ab$, d. h. die Summe der Quadrate zweier Zahlen ist größer als ihr doppeltes Produkt.

VI. Leicht ist's, die Bildungsweise des Produkts aus m Binomialfaktoren $(x + a)(x + b)(x + c) \ldots$ zu erhalten. In der That hat man für zwei oder drei Factoren die Produkte:

$x^2 + ax + ab$	$x^3 + ax^2 + abx + abc$
$\quad\;\; + bx$	$\quad\;\; + bx^2 + acx$
	$\quad\;\; + cx^2 + bcx$

Aus dem Verfahren der Multiplication selbst ergibt sich Folgendes:

1) Die verschiedenen Glieder des Produktes können keine Reductionen herbeiführen; die Buchstaben $a, b, c \ldots$ haben also weder numerische Coefficienten noch Exponenten.

2) Das erste Glied ist das Produkt aus sämmtlichen ersten Gliedern, und das letzte das Produkt aus allen zweiten Gliedern der Binomialfactoren. Zwischen diesen äussern Gliedern nehmen die Exponenten von x um Eins von Glied zu Glied ab und das Produkt hat im Allgemeinen die Form:

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots + abcd \ldots$$

3) Sämmtliche Glieder bestehen aus einer gleichen Anzahl m von Factoren; der Coefficient A von x^{m-1} kann nicht die Buchstaben $a, b, c \ldots$ mit einander multiplicirt enthalten; der Coefficient B von x^{m-2} besteht aus Produkten von je zwei dieser Buchstaben, oder $ab, ac, bc \ldots$

4) Kommt auf irgend eine Weise der Buchstabe a in einem der Coefficienten $A, B, \ldots$ vor, so kommen daselbst die übrigen Buchstaben $b, c \ldots$ ganz auf dieselbe Weise vor, weil das Produkt ungeändert bleibt, wenn man a anstatt b und b anstatt a setzt, u. s. w. Folglich ist

A die Summe aller zweiten Glieder der Binome;

B die Summe aller verschiedenen Produkte von je zwei;

C die Summe aller verschiedenen Produkte von je drei u. s. w. Das letzte Glied ist das Produkt aller zweiten Glieder.

Die möglichen Vereinfachungen vorzunehmen darf man nicht unterlassen. So ist für $(4ab-2ac)$ $(6ab-3ac)$ der erste Factor gleichgeltend mit $2a\,(2b-c)$, und der zweite mit $3a\,(2b-c)$; das Produkt also $6a^2\,(2b-c)^2$ oder $6a^2\,(4b^2-4bc+c^2)$.

Oefters ist es vortheilhaft die Produkte in ihre Factoren zu zerlegen (die Division wird uns bald lehren, dergleichen Zersetzungen auszuführen). Für $3y^2z+3yz^2+py+pz$ sieht man leicht, daß die beiden ersten Glieder mit $3yz\,(y+z)$ und die beiden andern mit $p\,(y+z)$ übereinstimmen; man hat also $(3yz+p)\,(y+z)$.

Von der Division.

§. 7. Es sei a der Dividend, d der Divisor, q der Quotient und r der Rest; r ist kleiner als d. Jede Division gibt die Gleichung $a=dq+r$. (Arith. §. 16.)

Da der Quotient nicht geändert wird, wenn man Dividend und Divisor durch eine und dieselbe Zahl dividirt, so kann man, um die Division der Monome auszuführen, die dem Dividend und Divisor gemeinschaftlichen Buchstaben weglassen, die Exponenten der nämlichen Buchstaben von einander abziehen, die Coefficienten endlich durch einander dividiren. Man sieht übrigens, daß diese Regel die umgekehrte von der der Multiplication ist. (§. 5.)

$$\frac{12a^3b^2c}{3ab}=4a^2bc;\quad \frac{15a^3b^5}{5a^2b^2}=3ab^3;\quad \frac{8a^2b^2c}{4ab^2}=2ac;$$

b^2 verschwindet in dem dritten Exempel, weil die beiden Glieder b^2 als gemeinschaftlichen Factor enthalten.

$$\frac{3abc}{3abc}=1;\quad \frac{4ac^3de^3}{8bd^3e}=\frac{ac^3e^2}{2bd^2}.$$

Weiter kann man die Rechnung nicht fortsetzen; es bleibt noch ac^3e^2 durch $2bd^2$ zu dividiren übrig, wenn man die numerischen Werthe von a, b, c, d, e kennt.

Es sei jetzt $20ab^5+4a^6-25a^2b^4-4b^6$ durch $2b^3+2a^3-5ab^2$ zu dividiren. Da der Quotient mit dem Divisor multiplicirt den

Dividend wieder hervorbringen muß, so würde, in so fern man ein Glied des Produkts $20ab^5 + 4a^6 - \ldots$ kennte, welches aus der Multiplication eines gegebenen Gliedes des Divisors mit einem Gliede des Quotienten ohne Reduction entstanden wäre, eine einfache Division das letztere geben. Nun weiß man aber, daß die Glieder, wo irgend ein Buchstabe, wie a, den höchsten Exponenten in beiden Factoren enthält, dem Produkte ein Glied geben, welches mit keinem andern reducirt werden kann, weil a den höchsten Exponenten hier gleichfalls bei sich führt. Die Glieder $4a^6$ einerseits, und $2a^3$ anderseits, befinden sich in diesem Falle; $4a^6$ ist also das genaue Produkt des Gliedes $2a^3$ mit einem Gliede des Quotienten, wo a den höchsten Exponenten hat. Dieses Glied ist folglich $\frac{4a^6}{2a^3}$ oder $2a^3$. Multiplicirt man darauf den ganzen Divisor mit $2a^3$ und zieht dieses Produkt vom Dividend ab, so wird der Rest das Produkt des Divisors mit den übrigen Theilen des Quotienten sein. Die Aufgabe geht jetzt darauf hinaus, diesen Rest durch den Divisor zu dividiren, und jene Theile zu erhalten, was dieselbe Schlußfolge wie vorher mit sich bringt; das Glied des Restes nämlich, wo der Buchstabe a den höchsten Exponenten hat, wird durch $2a^3$ dividirt.

Um die Verwirrungen zu vermeiden unter den Gliedern des Dividends, so wie in den successiven Resten dasjenige heraus zu finden, wo a den höchsten Exponenten hat, ist es zweckgemäß, den Dividend und Divisor zu ordnen, d. h. in die erste Stelle das Glied, wo a den höchsten Exponenten, in die zweite Stelle das Glied, wo a den unmittelbar darauf folgenden Exponenten hat, zu setzen, und so fort.

$$\begin{array}{lr|l}
 & 4a^6-25a^2b^4+20ab^5-4b^6 & 2a^3-5ab^2+2b^3 \\
 & -4a^6+10a^4b^2-4a^3b^3 & \overline{2a^3+5ab^2-2b^3} \\
\hline
\text{Erster Rest}\ldots & +10a^4b^2-25a^2b^4-4a^3b^3+20ab^5-4b^6 & \\
 & -10a^4b^2+25a^2b^4-10ab^5 & \\
\hline
\text{2ter Rest}\ldots\ldots\ldots & -4a^3b^3+10ab^5-4b^6 & \\
 & +4a^3b^3-10ab^5+4b^6 & \\
\hline
\text{3ter Rest}\ldots\ldots\ldots & 0 &
\end{array}$$

Man sieht, daß nach der Division von $4a^6$ durch $2a^3$ der ganze Divisor mit dem Partialquotienten $2a^3$ multiplicirt und das Produkt vom Dividend abgezogen wurde, was einen ersten Rest gab. Das

Glied $+ 10a^4b^2$ dieses Restes, wo a den höchsten Exponenten hat, wurde dann abermals durch $2a^3$ dividirt; man erhielt so $+ 5ab^2$ als zweites Glied des Quotienten. Der Divisor wurde darauf mit diesem Gliede $+ 5ab^2$ multiplicirt und das Produkt vom ersten Reste abgezogen, was einen zweiten Rest gab. Endlich vervollständigte die Division von $-4a^3b^3 : 2a^3 = -2b^3$ den Quotienten, weil man weiter keinen Rest fand.

Wenn man, wie hier oben, Glieder mit verschiedenen Zeichen, das eine mit $+$, das andere mit $-$ versehen erhält, so gibt man dem partiellen Quotienten das Zeichen $-$, und zwar deshalb, damit bei der Multiplication das erste Glied des Dividends wieder zum Vorschein komme. Wären beide Glieder der Partialdivision negativ, so würde der korrespondirende Quotient das Zeichen $+$ erhalten. Man darf dies blos als ein Ergebniß der Rechnung ansehen, ohne erklären zu wollen, was die Division zweier Glieder, die nicht beide zusammen positiv sind, wohl bedeuten möge. In der That handelt es sich hier nur darum, ein System von Gliedern zu finden, welches nach den bekannten Regeln mit dem Divisor multiplicirt den Dividend wieder hervorbringe.

Hieraus entnehmen wir für die Division der Polynome folgende Regeln: Ordne den Dividend und Divisor in Bezug auf einen und denselben Buchstaben, dividire das erste Glied des Dividends mit dem ersten Gliede des Divisors, was ein Glied des Quotienten gibt; mit diesem Gliede multiplicire den ganzen Divisor, ziehe das Produkt vom Dividend ab; den Rest unterwerfe derselben Operation. Bei den partiellen Divisionen beobachte die Regel der Zeichen der Multiplication. Diese Operation wird so lange fortgesetzt, bis man auf einen Rest kommt, in welchem die höchste Potenz jenes Buchstabens, nach welchem geordnet worden ist, einen kleinern Exponenten hat, als die höchste Potenz desselben Buchstabens im Divisor.

Daß man auch in Rücksicht auf b, oder auf einen andern gemeinsamen Buchstaben, hätte ordnen, überdem ganz dasselbe in Bezug auf den kleinsten Exponenten des Buchstabens sagen können, was wir über den größten desselben gesagt haben, ist hier noch zu bemerken.

§. 8. Hier stehen zwei andere Divisionsexempel:

$$\begin{array}{ll|l}
 & 6a^4+4a^3b-9a^2b^2-3ab^3+2b^4 & 2a^2+2ab-b^2 \\
 & -6a^4-6a^3b+3a^2b^2 & 3a^2-ab-2b^2 \\
\text{Erster Rest} \ldots\ldots & -2a^3b-6a^2b^2-3ab^3+2b^4 & \\
 & +2a^3b+2a^2b^2-ab^3 & \\
\text{2ter Rest} \ldots\ldots & -4a^2b^2-4ab^3+2b^4 & \\
 & +4a^2b^2+4ab^3-2b^4 & \\
\text{3ter Rest} \ldots\ldots & 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll|l}
 & a^5-b^5 & a-b \\
 & -a^5+a^4b & a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4 \\
\text{Erster Rest} \ldots\ldots & a^4b-b^5 & \\
 & -a^4b+a^3b^2 & \\
\text{2ter Rest} \ldots\ldots & a^3b^2-b^5 & \\
 & -a^3b^2+a^2b^3 & \\
\text{3ter Rest} \ldots\ldots & a^2b^3-b^5 & \\
 & -a^2b^3+ab^4 & \\
\text{4ter Rest} \ldots\ldots & ab^4-b^5 & \\
 & -ab^4+b^5 & \\
\text{5ter Rest} \ldots\ldots & 0 &
\end{array}$$

Wenn man den Gang der letzten Division mit Aufmerksamkeit verfolgt, so sieht man bei der Division von a^m-b^m durch $a-b$, daß in jedem Reste und jedem Quotienten die Exponenten von a um Eins abnehmen, und die von b um eben so viel zunehmen; die Reste sind also Binome, deren erstes Glied successive $a^{m-1}b$, $a^{m-2}b^2$.... ist. Kommt man zu dem Reste $ab^{m-1}-b^m$, so gibt die Division durch $(a-b)$ den vollständigen Quotienten b^{m-1}, so daß a^m-b^m durch $(a-b)$ genau theilbar ist. Man hat $\frac{a^m-b^m}{a-b}=a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^2+\ldots+b^{m-1}$.

Wenn $b=1$, so ist $\frac{a^m-1}{a-1}=a^{m-1}+a^{m-2}+a^{m-3}+\ldots\ldots\ldots+1$.

Uebrigens ist es leicht, die Richtigkeit dieser Gleichungen darzuthun, indem man die zweite Seite derselben, bezüglich mit $a-b$ und $a-1$ multiplicirt; man findet auf diese Weise die Zähler a^m-b^m und a^m-1 wieder.

Dividirt man a durch $1-x$, so hat die Operation kein Ende, und man findet die unbegrenzten Quotienten $\frac{a}{1-x}=a(1+x+x^2+x^3+\ldots)$

Man kann folglich die erste Seite als die Summe der Glieder der zweiten Seite betrachten; dieser Bruch ist hiernach die Summe einer ins Unendliche fortlaufenden geometrischen Reihe, deren erstes Glied a und deren Quotient x ist. Ist z. B. $a = 2$, $x = \frac{1}{3}$, $1 - x = \frac{2}{3}$ so findet man $2 : \frac{2}{3}$ oder 3 als Summe der ins Unendliche fortgesetzten Reihe $\div 2 : \frac{2}{3} : \frac{2}{9} : \frac{2}{27} \ldots.$ Ebenso für $a = \frac{1}{2}$ und $x = \frac{2}{3}$ ist $\frac{3}{2} = \frac{1}{2}(1 + \frac{2}{3} + [\frac{2}{3}]^2 + \ldots.)$. Endlich für $a = \frac{2}{3}$ und $x = -\frac{1}{2}$ ist $\frac{4}{9} = \frac{2}{3}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots.)$.

Der periodische Decimalbruch [0,54] so viel wie $\frac{54}{100} + \frac{54}{10000} + \ldots.$ oder $\frac{54}{100}(1 + \frac{1}{100} + [\frac{1}{100}]^2 + \ldots.)$ ist $= \frac{54}{99}$, wenn man $a = \frac{54}{100}$ und $x = \frac{1}{100}$ setzt. Ueberhaupt stellt p die aus n-Ziffern bestehende Periode eines vollständig periodischen Decimalbruchs dar, so ist dieser Bruch

$$\frac{p}{10^n} + \frac{p}{10^{2n}} + \ldots. = \frac{p}{10^n - 1} = \frac{p}{999\ldots}$$ (Arith. §. 53).

Setzt man $a = 1$ und $x = \frac{3}{2}$, so kommt $-2 = 1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \ldots.$ Man begreift Anfangs nicht, wie man durch Addition von stets wachsenden und positiven Gliedern als Summe -2 finden könne. Setzt man aber die Division nur bis auf 4 Glieder fort, so hat man den Rest ax^4; der genaue Quotient ist demnach $a(1 + x + x^2 + x^3 + \frac{x^4}{1-x})$, wo der Bruch die Summe aller übrigen Glieder bis ins Unendliche darstellt. Dieser Bruch wird $-\frac{81}{8}$, wenn man $a = 1$ und $x = \frac{3}{2}$ setzt; nimmt man also nur auf die ersten Glieder Rücksicht, so bilden die vernachläßigten Glieder eine negative Summe, die größer als der in Betracht genommene Theil ist. Die beiden Theile sind hier $1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{27}{8} - \frac{81}{8}$, was sich auf -2, identisch also mit der ersten Seite der frühern Gleichung, reducirt.

Der Widerspruch rührt allein daher, daß man die n ersten Glieder nur dann als einen mehr oder weniger annähernden Theil der Summe betrachten kann, in so fern $\frac{ax^n}{1-x}$ fortwährend abnimmt, in dem Maße die Zahl der beibehaltenen Glieder zunimmt; was erfordert, daß x kleiner als 1 ist. Eine solche Reihe, in der die Glieder desto mehr abnehmen, je weiter sie sich vom ersten Gliede entfernen, wird eine convergirende Reihe genannt.

Anmerkung. Convergirende Reihen sind eigentlich diejenigen Reihen nur, für welche die Summen der Glieder, von den

ersten an gerechnet, sich einer gewissen Grenze unendlich nähern. Wenn aber das Gegentheil statt findet, d. h. die erwähnte Summe bei Zunehmen der Zahl der Glieder sich keiner bestimmten Grenze nähert, so heißt die Reihe eine divergirende Reihe. Siehe die höhere Algebra über die Convergenz der Reihen und Cauchy's Lehrbuch der algebraischen Analysis (übersetzt von Huzler) sechstes Kapitel, von den convergirenden und divergirenden Reihen.

§. 9. Auf eine Schwierigkeit wollen wir aufmerksam machen. Es kommt nämlich zuweilen vor, daß der Buchstabe, nach welchem man ordnet, sich in mehreren Gliedern mit demselben Exponenten versehen vorfindet. Es ist die Frage, welch Glied hier zuerst geschrieben werden soll, und was dann aus unserer frühern Beweisart wird. Nach einiger Ueberlegung sieht man, daß es in diesem Falle hinreichend ist, den fraglichen Gliedern den Buchstaben mit seinem Exponenten als gemeinschaftlichen Factor zu geben, zwischen Klammern sonach die ihn multiplicirende Größe zu setzen. Dieses Aggregat wird dann als ein einziges Glied betrachtet. Hätte man z. B. $4a^4b^2 - 4a^4bc + a^4c^2$, so schreibt man $a^4(4b^2 - 4bc + c^2)$, das als ein einziges Glied angesehen wird.

Ein Exempel wird den hier zu befolgenden Gang klarer machen:

$$\begin{array}{l|l}
(4b^2-4bc+c^2)a^4-(b^2+2bc+c^2)a^2b^2+(b+c)2ab^4-b^6 & \underline{(2b-c)a^2-(b+c)ab+b^3} \\
\underline{-(4b^2-4bc+c^2)a^4+(2b-c)(b+c)\,a^3b-(2b-c)a^2b^3} & (2b-c)a^2+(b+c)ab-b^3 \\
(2b-c)(b+c)a^3b-(3b^2+bc+c^2)a^2b^2+(b+c)2ab^4-b^6 & \\
\underline{-(2b-c)(b+c)(a^3b+(b^2+2bc+c^2)a^2b^2-(b+c)\,ab^4} & \\
\qquad\qquad -(2b-c)\,a^2b^3+(b+c)\,ab^4-b^6 & \\
\qquad\qquad \underline{+(2b-c)\,a^2b^3-(b+c)\,ab^4+b^6} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Von den Brüchen und den gemeinschaftlichen Theilern.

§. 10. Alles, was wir über die arithmetischen Brüche gesagt haben, läßt sich auch von den algebraischen Brüchen behaupten.

1) $\frac{a}{b}$ bezeichnet also, daß die Einheit in b gleiche Theile getheilt ist, und von diesen a Theile genommen sind. Der Bruch

mit seinem Nenner multiplicirt gibt den Zähler, d. h. es ist immer $\frac{a}{b} \times b = a$. (Arith. §. 37.)

2) Was auch m sein mag, so hat man $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$. (Arithmetik §. 38.)

3) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$ (Arith. §. 39); $\frac{a}{m} \pm 1 = \frac{a \pm m}{m}$.
Das Zeichen $\pm$ wird plus oder minus ausgesprochen; es zeigt an, daß man in beiden Theilen zugleich entweder das obere oder das untere Zeichen nehmen soll.

4) $\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}$; $\frac{a}{mb} \times b = \frac{a}{m}$; $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$;
$(a + \frac{b}{c})\ (m + \frac{p}{q}) = \frac{(ac + b)\ (mq + p)}{cq}$ (Arith. §. 40.)

5) $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$; $\frac{am}{b} : m = \frac{a}{b}$; $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$;
$(a + \frac{b}{c}) : (m + \frac{p}{q}) = \frac{q\ (ac + b)}{c\ (mq + p)}$. (Arith. §. 41.)

6) $\frac{a}{b}$ ist größer oder kleiner als $\frac{a + x}{b + x}$, je nachdem a größer oder kleiner als b ist. Werden die beiden Brüche unter einerlei Benennung gebracht, so ist $\frac{a}{b} = \frac{ab + ax}{b(b + x)}$ und $\frac{a + x}{b + x} = \frac{ab + bx}{b(b+x)}$. Von den Brüchen $\frac{ab + ax}{b(b+x)}$ und $\frac{ab + bx}{b(b+x)}$ ist nun derjenige der bedeutendere, der den größern Zähler hat, d. h. der erste übertrifft den zweiten, wenn $a > b$; dagegen übertrifft der zweite den ersten, wenn $b > a$. Eben so beweist man, daß $\frac{a}{b} > \frac{a - x}{b - x}$, wenn $a < b$ und $\frac{a}{b} < \frac{a - x}{b - x}$, wenn $a > b$ ist.

§. 11. Suchen wir jetzt den größten gemeinschaftlichen Theiler D von zwei Polynomen, A und B, so ist dieses ein drittes Polynom, welches die beiden ersten genau theilt, und zwar so, daß die herauskommenden Quotienten keinen gemeinschaftlichen Factor mehr haben.

I. Sind A und B durch D theilbar, so ist $A = Dx$ und $B = Dy$. Dividiren wir A durch B, bezeichnen den Quotienten dieser Division durch q, und durch R den Rest, so werden wir erhalten $A = Bq + R$, woraus wir, wenn mit D dividirt wird, $x = yq + \frac{R}{D}$ ableiten; R ist also nothwendigerweise durch D theilbar und von der Form $R = Dz$, was $x = yq + z$ gibt.

Jeder gemeinschaftliche Theiler von A und B wird also auch den Rest ihrer Division genau theilen.

Nehmen wir jetzt an, daß D der größte gemeinschaftliche Theiler von A und B sei, d. h. x und y keinen gemeinschaftlichen Factor mehr haben: so enthalten auch y und z keinen solchen Factor; denn wäre derselbe vorhanden, so würde er auch x theilen müssen, mithin ein gemeinschaftlicher Factor von x und y existiren. Der größte gemeinschaftliche Theiler von A und B ist also auch immer der größte gemeinschaftliche Theiler von B und dem Reste ihrer Division.

II. Der größte gemeinschaftliche Theiler von A und B wird nicht geändert, wenn man A durch eine Größe, welche mit B keinen gemeinsamen Factor hat, dividirt, oder multiplicirt. Denn es sei $A = Dx$ und $B = Dy$, wo x und y keinen gemeinschaftlichen Factor haben. Offenbar wird D noch der größte gemeinschaftliche Theiler bleiben, wenn man x oder y, oder auch nur irgend einen ihrer Factoren wegläßt; das nämliche findet statt, wenn man A mit einer beliebigen Größe z, die mit B keinen gemeinsamen Factor hat, multiplicirt.

III. Ist ein nach a geordnetes Polynom A durch eine von a unabhängige Größe F theilbar, so müssen die Coefficienten jeder Potenz dieses Buchstaben a einzeln durch F theilbar sein. Es sei $Ma^m + Ha^h + \ldots$ der Quotient von A dividirt durch F, also $A = FMa^m + FHa^h + \ldots$ Da nun in F kein a vorkommt, so können hier auch keine Reductionen von einem zu einem andern Gliede statt finden. Jeder Coefficient behält demnach den Factor F bei.

Wir schreiten nun zur Anwendung dieser Sätze. Wenn man nach der sogleich zu zeigenden Methode den größten gemeinschaftlichen Theiler zweier beliebigen Coefficienten von A, dann einen solchen

Theiler zwischen dem eben gefundenen Factor und einem andern Coefficienten von A aufsucht, und dies für alle übrigen Coefficienten fortsetzt: so ist klar, im Falle A einen von a unabhängigen Factor hat, solcher mithin jedes einzelne Glied genau theilt, daß man auf diese Weise jenen von a unabhängigen Factor F finden wird. Man erhält hiernach $A = FA'$, wo A' ein bekanntes Polynom darstellt, das keinen Factor ohne a mehr zuläßt. Eine ähnliche mit B ausgeführte Rechnung wird den von a unabhängigen Factor F', wenn solcher existirt, zum Vorschein bringen; man hat dann $B = F'B'$.

Der größte Theiler K zwischen F und F' ist der von a unabhängige, den Größen A und B gemeinschaftliche Factor; oder mit andern Worten: hat der größte gemeinschaftliche Theiler der Polynome A und B die Form QK, wo der eine Factor Q die Größe a, der andere K kein a enthält, und ist dieser letztere (K) gefunden, so bleibt nur noch übrig Q zu suchen, das durch keinen von a unabhängigen Factor theilbar sein kann. Ist einmal K bekannt, hat man mithin $F = K\alpha$ und $F' = K\beta$, woraus $A = K\alpha \cdot A'$ und $B = K\beta \cdot B'$: so wird, indem man den Factor K wegstreicht, Q der größte gemeinschaftliche Theiler der Größen $A'\alpha$ und $B'\beta$, oder vielmehr der Größen A' und B' sein, weil man α und β weglassen kann. (II.)

Hieraus entnehmen wir Folgendes: Nachdem die von a unabhängigen und allen Gliedern gemeinsamen Factoren F und F', der eine von A, der andere von B, gefunden sind, läßt man diese Factoren weg und erhält dadurch die vereinfachten Polynome A' und B'. Der den Größen F und F' gemeinsame Factor K wird bei Seite gesetzt, um den herauskommenden Theiler Q zwischen A' und B' damit zu multipliciren; KQ wird dann der verlangte Theiler sein.

Wir gehen nun an die Aufsuchung des von a abhängigen Factors Q. Da der Quotient q von A', dividirt durch B', kein Bruch sein darf, so reicht das bloße Verfahren wie bei Zahlen hier nicht aus. Es seien die zwei Polynome gegeben:

$$A' \ldots . \quad Ma^m + M'a^{m'} + \ldots . ,$$
$$B' \ldots . \quad Na^n + N'a^{n'} + \ldots . ,$$

die nach dem Buchstaben a geordnet sind. Man dividirt das erste Glied Ma^m durch das Glied Na^n; enthält nun N einen Factor α, der M nicht theilt, so wird der Quotient ein Bruch. Um diese Schwierigkeit zu heben, multiplicirt man A' mit α, was hier zulässig ist, da die von a unabhängigen gemeinschaftlichen Factoren der

Annahme gemäß aus B' herausgenommen sind. M geht dadurch in die durch N theilbare Größe $M\alpha$ über. Man kann also die ersten Glieder immer dahin verwandeln, daß die Theilbarkeit möglich wird, indem man die Factoren, welche dem Aufgehen der Division entgegenstehen, theils in N wegläßt, theils in M einführt. Ein ähnlicher Gang wird bei jeder nachfolgenden Division beobachtet, damit, wie es der Lehrsatz erfordert, in sämmtlichen Partialquotienten keine Brüche zum Vorschein kommen.

1) Es seien die Polynome

$36a^2cd - 120abcd + 100b^2cd$, und $36a^3c - 6a^2bc - 90ab^2c$ gegeben.

Der gemeinschaftliche Factor von $120abcd$ und $100b^2cd$ ist $20bcd$; der von $20bcd$ und $36a^2cd$ ist $4cd(F)$. Ebenso erhält man $6ac\,(F')$ als gemeinschaftlichen Factor sämmtlicher Glieder des zweiten Polynoms. Werden diese Factoren weggelassen, so reducirt sich die Aufgabe darauf, den größten gemeinschaftlichen Theiler der Polynome $9a^2 - 30ab + 25b^2$ und $6a^2 - ab - 15b^2$ zu suchen. Da aber $4cd$ und $6ac$ den Factor $2c$ gemein haben, so behält man $2c$ zurück, um damit den gemeinschaftlichen Theiler der reducirten Polynome zu multipliciren; $2c$ ist der von a unabhängige Factor K. Hier steht das Ende der Rechnung:

$9a^2 - 30ab + 25b$	$6a^2 - ab - 15b$	$3a - 5b$ gemeinsch. Theil.
$18a^2 - 60ab + 50b$	1r Quot.: 3	$2a + 3b$
1r Rest $-57ab + 95b$	2r Rest $9ab - 15b^2$	.
oder $-19b\,(3a - 5b)$	3r Rest 0	

Weil $9a^2$ durch $6a^2$ nicht theilbar ist, so multiplicirt man zuvor den ganzen Dividend mit 2; der Quotient 3 führt dann zu dem Reste $-57ab + 95b^2$. Die Aufgabe ist nun den größten gemeinschaftlichen Theiler zwischen diesem Binom und dem vorigen Divisor zu finden. Man hat also eine ähnliche Rechnung wie eben zu verrichten. Das zweite Polynom $6a^2 - ab - 15b^2$ dient als Dividend, der Rest $-57ab + 95b^2$ als Divisor. Der letztere läßt sich durch Hinwegstreichen des gemeinsamen Factors $-19b$, der kein Factor vom Dividend ist, vereinfachen, und man erhält $(3a - 5b)$. Da hier die Division aufgeht, so ist der gesuchte größte gemeinschaftliche Theiler $2c\,(3a - 5b)$ oder $6ac - 10bc$.

2) Der Bruch $\frac{6a^3 - 6a^2y + 2ay^2 - 2y^3}{12a^2 - 15ay + 3y^2}$ soll auf die einfachste Form gebracht werden. Die Polynome haben 2 und 3 als Factoren, die man, ohne den größten gemeinschaftlichen Theiler zu ändern, weglassen kann; der Divisor wird dadurch in $4a^2 - 5ay + y^2$ und das erste Glied des Dividends in $3a^3$ verwandelt. Um die Theilbarkeit möglich zu machen, multiplicirt man den Dividend mit 4, d. h. man verdoppelt den Zähler; man hat also den größten gemeinschaftlichen Theiler von $12a^3 - 12a^2y + 4^2ay - 4y^3$ und $4a^2 - 5ay + y^2$ zu suchen. Eine erste Division gibt den Quotienten $3a$ und den Rest $3a^2y + ay^2 - 4y^3$. Um die Division abermals möglich zu machen, multiplicirt man diesen Rest mit 4; der Dividend wird, nachdem man den gemeinsamen Factor y weggelassen hat, $12a^2 + 4ay - 16y^2$. Eine zweite Division führt zu dem Reste $19ay - 19y^2$, der jetzt als Divisor von $4a^2 - 5ay + y^2$ gebraucht wird und sich auf $a - y$ reducirt, wenn man die Factoren 19 und y wegstreicht. Da die Division aufgeht, so ist $a - y$ der größte gemeinschaftliche Theiler. Der vorgelegte Bruch reducirt sich hiernach auf $\frac{6a^2 + 2y^2}{12a - 3y}$. Hier steht die Rechnung:

$12a^3 - 12a^2y + 4ay^2 - 4y^3$	$4a^2 - 5ay + y^2$	$19ay - 19y^2$
$+ 3a^2y + ay^2 - 4y^3$	$3a + 3$	$a - y$ gemeinsch. Theiler.
$12a^2 + 4ay - 16y^2$	$- ay + y^2$	$4a - y.$
$19ay - 19y^2$	0	

3) Man findet ebenso, daß $2a^2 + 2ab - b^2$ der größte gemeinschaftliche Theiler der Größen $4a^4 - 4a^2b^2 + 4ab^3 - b^4$ und $6a^4 + 4a^3b - 9a^2b^2 - 3ab^3 + 2b^4$ ist. Der Bruch $\frac{4a^4 - 4a^2b^2 + 4ab^3 - b^4}{6a^4 + 4a^3b - 9a^2b^2 - 3ab^3 + 2b^4}$ ist demnach gleich $\frac{2a^2 - 2ab + b^2}{3a^2 - ab - 2b^2}$.

4) In dem Bruche $\frac{54a^2b - 24b^3}{45a^3b + 3a^2b^2 - 9ab^3 + 6b^4}$ ist $3b$ der von a unabhängige Factor; läßt man ihn in beiden Gliedern, desgleichen 2 im Zähler weg, so ist man darauf zurückgeführt den gemeinschaftlichen Theiler von $9a^2 - 4b^2$ und $15a^3 + a^2b - 3ab^2 + 2b^3$ zu suchen. Man findet, daß solcher $3a + 2b$, mithin $3b\,(3a + 2b)$ der verlangte Theiler ist; der gegebene Bruch reducirt sich hiernach auf $\frac{6a - 4b}{5a^2 - 3ab + b^2}$.

5) Man darf nicht vergessen, die Glieder, die dieselbe Potenz des Buchstaben, nach welchem geordnet ist, enthalten, zusammen zu nehmen und als ein einziges Glied zu betrachten. Es findet dies bei dem Bruche

$$\frac{a^2(b^2-c^2)-ab\,(2b^2+bc-c^2)+b^3(b+c)}{a^3(b^2+2bc+c^2)-a^2b\,(2b^2+3bc+c^2)+ab^3(b+c)}$$

statt. Die Betrachtung der Coefficienten $(b+c)$, $(2b^2+bc-c^2)$, (b^2-c^2) u. s. w., zeigt bald, daß $(b+c)$ ein von a unabhängiger gemeinsamer Factor ist. Man scheidet ihn als einen Factor des größten gemeinschaftlichen Theilers aus und sucht solchen letztern zwischen den erhaltenen Quotienten $a^2(b-c)-ab\,(2b-c)+b^3$ und $a^3(b+c)-a^2b\,(2b+c)+ab^3$. Man findet bei fortgesetzter Operation noch den gemeinsamen Factor $a-b$; das Produkt aus diesem in den ersten oder $(a-b)\,(b+c)$ ist der größte gemeinschaftliche Theiler der Glieder des gegebenen Bruches; er reducirt sich hiernach auf

$$\frac{a\,(b-c)-b^2}{a^2(b+c)-ab^2}.$$

6) Man suche den größten gemeinschaftlichen Theiler der Polynome $(c-d)\,a^2+2b\,(c-d)\,a+b^2(c-d)\ldots.\ (A)$ und $(bc-bd+c^2-cd)\,a+b^2d+bc^2-b^2c-bcd\ldots.\ (B)$.

Man sieht auf der Stelle, daß A und B den gemeinsamen Factor $c-d$ haben, der aus beiden Größen herausgezogen wird, wodurch A in $a^2+2b+b^2\ (A')$ und B in $(b+c)\,a+b\,(c-b)\ (B')$ verwandelt wird. Es zeigt sich bald, daß A' und B' keinen gemeinschaftlichen Factor mehr haben; folglich ist der oben gefundene Factor $(c-d)$ der größte gemeinschaftliche Theiler von A und B.

§. 12. Die kleinste durch zwei gegebene Zahlen a und b theilbare Zahl n zu finden. Diese Zahl würde offenbar $a\times b$ sein, wenn a und b Primzahlen unter sich wären. Nun sei d ein Theiler von a und b, so daß $a=da'$ und $b=db'$. Da $da'b'=ab'=a'b$, so ist $da'b'$ durch a und b theilbar. $\frac{ab}{d}$ ist aber desto kleiner, je größer d ist; hiernach wird die Zahl $n=da'b'$, die kleinste durch a und b theilbare Zahl sein, wenn d ihr größter gemeinschaftlicher Theiler ist. So haben 312 und 132 als größten Theiler 12; die Quotienten sind 26 und 11; folglich $12\cdot26\cdot11=3432$ das kleinste Vielfache von 312 und 132.

Zweites Kapitel.

Von den Gleichungen des ersten Grades.

Gleichungen vom ersten Grade mit einer Unbekannten.

§. 13. Der Grad einer Gleichung wird durch die höchste in ihr vorkommende Potenz der Unbekannten angezeigt: $x, y, z \ldots$ stellen die unbekannten, $a, b, c \ldots$ dagegen die gegegebenen Größen dar. So ist $ax + b = cx$ eine Gleichung vom ersten Grade;

$ax^2 + dx = c$ eine vom zweiten Grade, oder quadratische Gleichung:

$x^3 + 9x^2 = r$ eine vom dritten Grade, oder cubische Gleichung, u. s. w.

Anmerkung. Eine Gleichung heißt unbedingt oder identisch, wenn ihr völlig Genüge geleistet wird, welchen Werth man auch den darin vorkommenden Buchstaben geben mag. Eine solche Gleichung ist $4(a + b)c = 2ac + 4bc + 5d + 2ac - 5d$. Eine algebraische oder bedingte Gleichung ist dagegen diejenige, welche erst dann bestehen kann, wenn man einem oder mehreren der darin vorkommenden Buchstaben gewisse Werthe beilegt. So ist $5x = 2x + 8$ eine algebraische Gleichung, weil sie nur für einen gewissen Werth von x richtig wird. Gleichungen, in welchen ausser den Unbekannten blos Zahlen vorkommen heißen numerische Gleichungen, dagegen Literalgleichungen diejenigen, welche blos Buchstaben enthalten.

Um eine vorgelegte Aufgabe oder ein Problem aufzulösen, muß man vorerst die Bedingungen, durch welche die gegebenen Größen mit der unbekannten verbunden sind, mittelst einer Gleichung ausdrücken. Ist diese Uebertragung der Aufgabe in die algebraische Sprache geschehen, so bleibt nur noch die Aufgabe aufzulösen übrig, d. h. die unbekannte von allen bekannten Größen, mit welchen sie sich

verbunden findet, befreien, und sie auf die Form $a = A$ bringen; A ist der gesuchte Werth.

Z. B. ein Vater ist jetzt viermal so alt als sein Sohn, die Summe ihrer Alter beträgt 45 Jahre; wie alt ist jeder? Es sei x das Alter des Sohnes, $4x$ demnach das Alter des Vaters; da $x + 4x$ zusammen 45 Jahre betragen soll, so ist $5x = 45$. Es ist dies die Gleichung, welche in unserer Aufgabe die Verbindungsweise, in der die unbekannte zu den gegebenen Größen steht, ausdrückt. Diese Gleichung muß jetzt aufgelöst werden, was dadurch geschieht, daß man auf beiden Seiten mit 5 dividirt (Arith. §. 5); man erhält $x = 9$, also 9 Jahre das Alter des Sohnes und 36 Jahre das des Vaters.

Man sieht hier deutlich, wie die Aufgabe aus zwei sehr verschiedenen Theilen besteht, erstens aus dem Ansetzen der Gleichung, zweitens aus dem Auflösen derselben. Wir wollen nun diese zwei Theile näher untersuchen, und mit dem zweiten den Anfang machen.

§. 14. In einer Gleichung vom ersten Grade kann die unbekannte mit den bekannten Größen nur durch Addition, Subtraction, Multiplication und Division verbunden sein. Hier folgen die Regeln, die man anwenden muß, um sie davon zu befreien:

I. Hat die Unbekannte mehrere Bruch-Coefficienten, so multiplicirt man die ganze Gleichung mit der Zahl, welche der gemeinschaftliche Nenner abgeben würde (Arith. §. 38). Diese Operation stört die Gleichung nicht, und entfernt aus ihr die Divisoren. Es geht dies dahin aus, alle Glieder auf einerlei Nenner zu bringen und solchen nachher wegzulassen. Es sei z. B. die Gleichung:

$$\tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{2}x - 20 - \tfrac{1}{6}x = \tfrac{3}{4}x - \tfrac{1}{12}x - 8.$$

Wird das Ganze mit 12 multiplicirt, so wird die Gleichung

$$8x + 6x - 240 - 2x = 9x - x - 96,$$

$$\text{oder } 12x - 240 = 8x - 96,$$

wenn man auf jeder Seite die angezeigten Operationen ausführt.

II. Alle unbekannten Glieder werden auf die eine Seite, und die gegebenen Größen auf die andere Seite gebracht; dabei erhalten die Glieder, welche von einer Seite auf die andere kommen, ein dem vorher gehabten entgegengesetztes Vorzeichen. Unsere letzte Gleichung wird hiernach: $12x - 8x = 240 - 96$, oder $4x = 144$.

In der That läßt man 240 im ersten Gliede der Gleichung $12x - 240$ weg, wodurch es auf $12x$ reducirt wird, so ist es um 240 vermehrt worden; damit die Gleichung nicht aufgehoben werde, muß man also das zweite Glied um 240 vermehren. Aehnlicherweise wird durch Hinweglassung von $8x$ das zweite Glied der Gleichung um $8x$ vermindert; man muß daher auch das erste Glied um $8x$ verringern.

III. Vermittelst dieser beiden Regeln kann die Gleichung auf die Form $ax = b$ gebracht werden. b ist das Produkt von a multiplicirt mit x (Arith. §. 5); wenn man daher b durch a dividirt, so gibt der Quotient den Werth von x; also $x = \frac{b}{a}$. Die Unbekannte wird folglich von ihren Coefficienten dadurch befreit, daß man die ganze Gleichung durch diesen Coefficienten dividirt.

Unsere Gleichung $4x = 144$ gibt hiernach $x = \frac{144}{4} = 36$. Diese Zahl thut der oben gegebenen Gleichung Genüge, d. h. ihre beiden Glieder werden einerlei sein, wenn man überall 36 anstatt x setzt. In unserm Beispiele ist $24 + 18 - 20 - 6 = 27 - 3 - 8 = 16$, wie es sein muß.

IV. Eine Gleichung vom ersten Grade läßt nur eine Auflösung zu. Denn jene kann immer auf die Form $ax + b = cx + d$ gebracht werden; könnte nun x zwei Werthe, α und β, haben, so hätte man die Gleichungen $\alpha a + b = c\alpha + d$, $a\beta + b = c\beta + d$, woraus, indem die zweite von der ersten abgezogen wird, $a(\alpha - \beta) = c(\alpha - \beta)$, oder $(a - c)(\alpha - \beta) = 0$; dieser Gleichung kann nur dadurch Genüge geschehen, daß $\alpha = \beta$, weil a und c gegebene ungleiche Größen sind.

Hier nur einige Beispiele zur Anwendung dieser Regeln:

1) $\frac{ax}{b} + \frac{cx}{f} + m = px + \frac{cx}{f} + n$; wird der auf beiden Seiten gemeinschaftliche Bruch $\frac{cx}{f}$ weggelassen, so hat man

$$\frac{ax}{b} + m = px + n;$$

wird das Ganze mit b multiplicirt, so kommt $ax + bm = bpx + bn$;
werden die Glieder bm und bpx versetzt, so ist $ax - bpx = bn - bm$;
oder . . . . $x(a - bp) = b(n - m)$;
wird durch $a - bp$ dividirt, so kommt endlich $x = \frac{b(n - m)}{a - bp}$.

2) $\frac{6}{5}x - 90 + \frac{2}{3}x = \frac{4}{3}x - 82$; durch Versetzung erhält man $\frac{6}{5}x + \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}x = 90 - 82$, oder $\frac{6}{5}x - \frac{2}{3}x = 8$; wird die Gleichung mit 15 multiplicirt, so kommt $18x - 10x = 8 \times 15$, oder $8x = 8 \cdot 15$, woraus $x = 15$.

3) $\frac{2}{7}x + 9 = \frac{1}{3}x - 10$ gibt $9 + 10 = \frac{1}{3}x - \frac{2}{7}x$; wird mit 21 multiplicirt, so kommt $19 \times 21 = 7x - 6x = x$; also $x = 399$.

4) $\frac{2}{9}x - 40 - \frac{1}{4}x = 60 - \frac{7}{5}x$ gibt $\frac{2}{9}x - \frac{1}{4}x + \frac{7}{5}x = 100$; wird mit $9 \times 4 \times 5$ multiplicirt, so erhält man $40x - 45x + 252x = 180 \cdot 100$, oder $247x = 18000$; folglich $x = \frac{18000}{247} = 72{,}8745$.

§. 15. Wir kommen nun zum ersten und schwierigsten Theile der Aufgabe, der darin besteht, die Gleichung anzusetzen. Um dahin zu gelangen untersucht man mit Aufmerksamkeit die Aufgabe in allen ihren Umständen, um sie gehörig zu verstehen; gibt der Unbekannten einen vorläufigen Werth, und nimmt dann mit dieser Zahl die erforderlichen Operationen vor, um zu prüfen, ob sie passe oder nicht. Auf diese Weise kennt man die Reihe von Rechnungsoperationen, die man mit der gesuchten Zahl ausführen müßte, wenn sie gegeben wäre, um zu ermitteln, ob sie wirklich der Aufgabe genüge. Mit Hülfe der algebraischen Zeichen endlich, unterwirft man x, welches die Unbekannte vorstellt, ganz denselben Operationen, und die Gleichung wird gebildet sein.

Hier einige Beispiele um die Anwendung dieser Vorschrift zu zeigen:

I. Wie groß ist die Schuldenlast einer Person, die nach Abtragung der Hälfte, des Drittels und des Zwölftels derselben noch 630 fl. schuldig bleibt?

Nehmen wir an, daß die Person 1200 fl. schuldig sei; 600 ist die Hälfte, 400 das Drittel, 100 das Zwölftel: die Person hat also 1100 fl. bezahlt; nun ist sie noch 630 fl. schuldig, folglich wäre sie im Ganzen 1100 + 630 oder 1730 fl. schuldig, und nicht, wie angenommen wurde, 1200 fl. Die Annahme war demnach unrichtig; aus den dabei stattfindenden Rechnungen, die man mit x leicht ausführt, ergibt sich

$$x = \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{12} + 630.$$

Das Uebrige bietet keine Schwierigkeiten mehr dar; wird mit 12 multiplicirt, so hat man $12x = 6x + 4x + x + 7560$, oder $12x =$

$11x + 7560$; woraus $x = 7560$ fl.; es ist dies die gesuchte Zahl, wie man sich leicht überzeugen kann.

Unsere Regel, um eine Aufgabe in Gleichung zu bringen, besteht also, wie schon gesagt, darin, mit x sämmtliche Operationen vorzunehmen, die man ausführen müßte, um den Werth der Unbekannten zu prüfen, ob er in der That der Aufgabe Genüge leiste.

Der der Unbekannten willkürlich beigelegte Werth dient nur dazu, die fraglichen Rechnungsoperationen gehörig herauszustellen; der Mühe, davon Gebrauch zu machen, ist man durch einige Uebung bald überhoben.

II. Es soll die Zahl angegeben werden, deren dritter und vierter Theil zusammen 63 ausmachen. Setzt man die unbekannte Zahl $= x$, so ist der dritte Theil derselben $= \frac{x}{3}$ und der vierte Theil $= \frac{x}{4}$. Folglich ist die Gleichung $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 63$; sie reducirt sich auf $7x = 12 \cdot 63$; woraus $x = \frac{12 \cdot 63}{7} = 12 \cdot 9 = 108$.

Will man die Zahl haben, deren fünfter und sechster Theil zusammen 22 geben, so muß man von neuem die Gleichung ansetzen, und sie dann auflösen. Man hat auf solche Weise $\frac{x}{5} + \frac{x}{6} = 22$; woraus $11x = 30 \cdot 22$, und $x = 60$.

Will man nun diese beiden Aufgaben, und alle ähnlichen der Art, die nur durch numerische Werthe von einander verschieden sind, auf einmal lösen, so stellt man die Zahlen durch die Zeichen $a, b, c\ldots$, geeignet, alle möglichen Werthe auszudrücken, dar, und löst dann folgende Aufgabe auf: Welche Zahl ist es, die, wenn sie durch a und b dividirt wird, und hierauf die Quotienten addirt werden, die Summe s gibt? Man findet $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = s$, woraus $x = \frac{abs}{a+b}$.

Dieser Ausdruck ist eigentlich, so zu sagen, nicht der Werth, der in unsern Aufgaben vorkommenden Unbekannten, er zeigt vielmehr die auszuführenden Rechnungsoperationen für alle an. Ein solcher Ausdruck heißt eine Formel. Die vorliegende Formel zeigt, daß die Unbekannte gefunden wird, indem man die in der Aufgabe enthaltenen drei Zahlen miteinander multiplicirt, und das Produkt abs

durch die Summe $a + b$ der beiden Divisoren dividirt. Unsere Formel ist also nichts anderes, als eine abgekürzte Schreibart dieser Aussage. Die Algebra ist folglich nichts anderes als eine Sprache, die bestimmt ist, Vernunftschlüsse auszudrücken; ihre Schriftzeichen zu lesen und zu schreiben, muß man verstehen. Der Vortheil, den jene Formel gewährt, ist solcher Art, daß der erfahrenste Algebraist und der ungeschickteste Rechner beide jetzt die Aufgabe lösen können. Der letztere gelangt nur dahin, indem er sich einer mechanisch *erworbenen* Fertigkeit blindlings überläßt; verschiedenartige Aufgaben bringen überdies verschiedene Formeln mit sich, der Algebraist allein weiß sie zu finden. Man sieht hieraus, wie zuweilen Personen mit erstaunenswerther Leichtigkeit rechnen und Resultate genau finden können, ohne daß sie eigentlich verstehen, was sie machen.

III. Die Summe der Alter zweier Brüder beträgt 57 Jahre, der eine ist 7 Jahre älter als der andere; wie alt ist jeder? Es sei x das Alter des Jüngern, also $x + 7$ das Alter des Aeltern, folglich die Gleichung $x + x + 7 = 57$; woraus $2x + 7 = 57$ und $x = 25$: der Jüngere ist 25 Jahre alt, der Aeltere 32 Jahre.

Wenn man die Aussage dieser Aufgabe näher untersucht, so sieht man leicht, daß sie unnöthige Dinge enthält; offenbar geht sie dahin, aus der bekannten Summe 57 von zwei Zahlen und ihrem Unterschiede 7, jede dieser Zahlen zu finden. Ueberhaupt ist es zweckgemäß, die Aufgaben von dem ihnen beigemengten Fremdartigen, das die Ideen nur verdunkelt und die Verbindungsweise der Größen untereinander versteckt, möglichst zu entkleiden. Es gehört dazu ein besonderer Takt, den man nur durch Uebung sich erwirbt; weder Lehrer noch Bücher können uns die erforderliche Urtheilskraft geben, um zu entscheiden, was bei einer Aussage nothwendig, was *unnöthig* sei. Um die vorige Aufgabe allgemein zu machen, drücken wir sie nun folgendergestalt aus: Es sollen zwei Zahlen gesucht werden, deren Summe gleich s und deren Differenz gleich d ist. Man bezeichne die kleinere durch x, die größere wird dann durch $x + d$ ausgedrückt. Die Bedingung der Aufgabe gibt also $x + (x + d) = s$; woraus $2x = s - d$, und $x = \frac{1}{2}(s - d)$. Die kleinere der gesuchten Zahlen ist gefunden; die größere ist $x + d$, oder $\frac{1}{2}(s - d) + d = \frac{1}{2}(s + d)$. Folglich sind $x = \frac{1}{2}(s - d)$, und $x + d = \frac{1}{2}(s + d)$ die der Aufgabe entsprechenden Zahlen. Man nimmt die Hälfte der

gegebenen Summe und die der gegebenen Differenz; die größere Zahl erhält man dann, wenn diese Hälften addirt, und die kleinere, wenn die Hälften von einander abgezogen werden.

Ein aus zwei Stockwerken bestehendes Haus hat eine Höhe von 15 Metern, der erste Stock ist 1 Meter höher als der zweite; wie hoch ist jeder Stock? $7\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$ sind die Hälften der gegebenen Zahlen; also ist $7\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 8$ Meter die Höhe des ersten Stocks, $7\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 7$ Meter die Höhe des zweiten.

IV. Eine Zahl a in zwei solche Theile zu zerlegen, die sich zu einander verhalten wie m zu n. Welches sind diese Theile? Der erste Theil sei x, der andere ist dann $\frac{nx}{m}$; da die Summe dieser Theile a beträgt, so hat man die Gleichung $x + \frac{xn}{m} = a$; woraus $x = \frac{ma}{m+n}$.

Eine Zahl in drei Theile zu zerlegen, die sich zu einander verhalten wie $m:n:p$. Ist x der erste Theil, so sind die zwei andern $\frac{nx}{m}$ und $\frac{px}{m}$; folglich $x + \frac{nx}{m} + \frac{px}{m} = a$; woraus $x = \frac{ma}{m+n+p}$. (Gesellschaftsrechnung Arith. §. 79.)

V. Ein Vater ist jetzt 40, sein Sohn 12 Jahre alt; in wie viel Jahren wird der Vater dreimal so alt als sein Sohn sein? In x Jahren ist des Vaters Alter $= 40 + x$ Jahre und das des Sohnes $= 12 + x$. Da $40 + x$ gleich dem Dreifachen von $12 + x$ sein soll, so ist $40 + x = 36 + 3x$; woraus $x = 2$.

VI. Mehrere Personen, die A, B, C... heißen mögen, sollen eine gewisse Geldsumme unter sich theilen; nach getroffener Uebereinkunft nimmt A aus der Masse 10 Dukaten und den sechsten Theil des Restes; B nimmt 20 Dukaten und den sechsten Theil des Restes; C nimmt 30 Dukaten und den sechsten Theil des Restes, und so fort bis zur letzten Person, die, das was übrig bleibt, nimmt; nach geschehener Theilung hat jede Person gleich viel. Wie groß war die zu theilende Summe, die Zahl der Personen und der Antheil einer jeden?

Obgleich hier drei Unbekannte vorkommen, so zeigt doch eine geringe Aufmerksamkeit, daß, wenn die zu theilende Summe x gefun-

den wäre, man bald auch die übrigen haben würde; die Aufgabe kann folglich so behandelt werden, als wenn nur eine Unbekannte da wäre.

Nimmt A 10 Dukaten, so bleiben noch $x - 10$; der sechste Theil davon ist $\frac{x-10}{6}$; der Antheil des A ist folglich $10 + \frac{x-10}{6}$, oder $\frac{x+50}{6}$.

B nimmt jetzt 20 weg, es bleiben hiernach $x - \frac{x+50}{6} - 20 = \frac{5x-170}{6}$; der sechste Theil davon ist $\frac{5x-170}{36}$; der Antheil des B ist folglich $20 + \frac{5x-170}{36}$ oder $\frac{5x+550}{36}$.

Da diese beiden Antheile gleich sein sollen, so hat man $\frac{x+50}{6} = \frac{5x+550}{36}$; oder $6x + 300 = 5x + 550$; woraus $x = 250$.

Die Summe beträgt also 250 Dukaten; der Antheil eines Jeden ist $\frac{x+50}{6}$ oder 50; die Zahl der Personen ist gleich $\frac{250}{50}$ oder 5.

VII. Aus a Karten werden b Karten gezogen; auf jede der letztern legt man so viel Karten, bis die Zahl der Karten mit der Zahl der Augen der Karte, auf welche man legt, c ausmache; zuletzt bleiben dann noch d Karten übrig. Wie groß ist die Summe der Augen x auf jenen b ersten Karten.

Die Zahl der Augen, nebst der Zahl der darauf gelegten Karten macht zusammen bc; zieht man die Anzahl der darauf gelegten Karten davon ab, so ist der Rest gleich x. Nun ist die Anzahl dieser Karten $= a - d - b$. Folglich $x = bc - (a - d - b)$ oder $x = b(c+1) + d - a$.

Hat man 32 Karten, zieht aus ihnen drei Karten heraus, und soll die Anzahl der Augen der ersten Karte mit der Anzahl der darauf liegenden zusammen 12 ausmachen, so ist $x = d + 7$.

VIII. Hat man eine Formel, welche den Werth der Unbekannten eines Problems in Buchstaben ausdrückt, gefunden, so kann man hernach diese Unbekannte als gegeben ansehen, und dafür eine der gegebenen Größen als die gesuchte annehmen; löst man nämlich die gefundene Gleichung in Bezug auf die letztere auf, so hat man die

Formel abgeleitet, welche eine durch jene Aenderung der Unbekannten entstandene andere Frage beantwortet. Ueberhaupt kann man in einer Gleichung jede verschiedene darin vorkommende allgemeine Größe als die gesuchte ansehen. Es ist also nicht gerade nöthig, die Elemente einer Aufgabe in gegebene und unbekannte Größen zu unterscheiden. Man sucht nunmehr die Relation der verschiedenen in der Aufgabe vorkommenden Größen zu einander durch eine Gleichung auszudrücken; die jedesmalige Frage bestimmt, welcher der als unbekannt zu betrachtende Buchstabe sei. Diese Bemerkung erleichtert die Auflösung von Problemen, wo die Unbekannte in einer verwickelten Verbindungsweise vorkömmt. Wir geben nun ein ziemlich zusammengesetztes Exempel, in dem das eben Gesagte seine Anwendung finden kann.

Die Mechanik lehrt, daß die Schwingungszeiten t, t' zweier Pendeln sich wie die Quadratwurzeln aus ihren Längen l, l' verhalten, oder $t : t' = \sqrt{l} : \sqrt{l'}$. Kennt man drei dieser Größen, so findet man die vierte aus der Gleichung $l't^2 = lt'^2$. Ein Pendel macht aber desto mehr Schwingungen, je schneller er geht; sind also n und n' die Zahl der Schwingungen, welche die zwei Pendel l und l' in derselben Zeit machen, so hat man die Proportion $t : t' = n' : n$; folglich $n' : n = \sqrt{l} : \sqrt{l'}$, woraus $n'\sqrt{l'} = n\sqrt{l}$. Nun zeigt die Erfahrung, daß der Sekundenpendel (derjenige, der 60 Schwingungen in einer Minute, oder 86400 Schwingungen an einem Tage macht) im leeren Raume zu Paris eine Länge von 0,9938267 Meter (l), oder von 36,713285 Zoll (l) hat.

Hiernach kann man die Zahl der Schwingungen n' eines bekannten Pendels l' während einer gegebenen Zeit leicht bestimmen, oder umgekehrt, aus der Zahl der Schwingungen n' während einer bestimmten Zeit die Länge l' eines Pendels finden. Denn das zweite Glied der Gleichung $n'\sqrt{l'} = n\sqrt{l}$ ist bekannt, man braucht also nur l' oder n' zu suchen. Z. B. welche Länge muß ein Pendel haben, damit er 100000 Schwingungen in 24 Stunden mache?

Man hat $l' = \frac{ln^2}{n'^2}$, wo $n = 86400$, $n' = 100{,}000$ und $l = 0{,}9938267$ ist. Die nebenstehende Rechnung gibt l' in Meter an; es ist die Länge des Sekundenpendels, wenn man den Tag in 10 Stunden, die Stunde in 100 Minuten, die Minute in 100 Sekunden abtheilt.

$$
\begin{aligned}
\text{Log.}\, n^2 &= 9{,}8730274 \\
\text{Log.}\, l &= 0{,}9973106-1 \\
-\text{Log.}\, n'^2 &= -10 \\
\hline
\text{Log.}\, l' &= 0{,}8703380-1 \\
l' &= 0{,}7418873
\end{aligned}
$$

IX. A und B treten mit gleich viel Geld zu einem Spiel; der Verlust des A beträgt 12 fl., der des B 57 fl., dadurch hat B nur noch den vierten Theil von dem was A übrig behält. Wie viel hatte jeder vor dem Spiel? Antwort: 72.

X. Verdoppelte man mir die Zahl meiner Thaler, sagt Jemand, so würde ich 8 verschenken; man erfüllt dreimal nach einander diesen Wunsch, es bleibt ihm zuletzt nichts übrig. Wie viel Thaler hatte diese Person? Antwort: 7.

XI. Eine Zahl zu finden, bei welcher, wenn sie durch a und b dividirt wird, und hierauf die Quotienten abgezogen werden, die Differenz gleich d sei? Welche Zahl ist es? Antwort: $x = \frac{abd}{b-a}$.

XII. Eine Zahl zu finden, deren Produkt aus ihren m gleichen Theilen gleich dem Produkte aus ihren $m+1$ gleichen Theilen sei (das Produkt der drei Drittel z. B. gleich dem der vier Viertel). Man hat

$$x = \frac{(m+1)^{m+1}}{m^m}.$$

XIII. Ein Jäger verspricht für jeden Fehlschuß, den er thäte, einem andern b fl.; dagegen soll der andere ihm jedesmal c fl. geben, wenn er träfe. Nach n Schüssen sind beide Jäger sich entweder nichts schuldig, oder der erste ist dem zweiten d schuldig, oder der zweite dem ersten. Man verlangt eine Formel, welche die Anzahl der Fehlschüsse für diese drei Fälle gibt. Der Gewinn ist c mal die Zahl $(n-x)$ der glücklichen Schüsse, der Verlust ist b mal x; woraus $bx - c\,(n-x) = \pm\, d$.

Man findet $x = \frac{cn \pm d}{b+c}$.

Für den ersten Fall ist d Null; für den zweiten Fall gilt das obere, für den dritten das untere Zeichen.

XIV. Ein Springbrunnen füllt einen Wasserbehälter in h Stunden, ein zweiter füllt denselben Behälter in h' Sunden; in welcher Zeit würden beide Springbrunnen, wenn sie zugleich fließen, den Behälter füllen? Antwort: $x = \frac{hh'}{h+h'}$.

Das Problem wird ebenfalls leicht gelöst, wenn mehr als zwei Springbrunnen da wären. (Arith. §. 77.)

Anmerkung. Die Aufgabe wird eine andere, wenn die Geschwindigkeit, mit der das Wasser fließt, nicht unverändert bleibt.

Sich in der Bildung und Auflösung der verschiedensten Gleichungen tüchtig zu üben, ist nützlich und nothwendig. Eine treffliche Auswahl solcher Aufgaben enthalten nachstehende Schriften:

1) Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra von Meier Hirsch.

2) Sammlung von Formeln, Aufgaben und Beispielen aus der Arithmetik und Algebra von J. Salomon.

3) Sammlung arithmetischer Uebungsaufgaben in ihrer Anwendung auf Gegenstände, welche sich besonders mit Logarithmen und Formeln viel leichter als gewöhnlich berechnen lassen, von Ch. Breithaupt.

4) Auflösungslehre der Gleichungen des ersten und zweiten Grades, sammt einer Sammlung von Aufgaben von T. Beskiba.

Bemerkungen über die Gleichungen des ersten Grades.

§. 16. Die algebraischen Formeln können nur in so fern einen klaren Sinn haben, als sie der Ausdruck einer Reihe von Rechnungsoperationen sind, deren Auflösung möglich ist. Die isolirte Größe $b-a$ z. B. drückt etwas Ungereimtes aus, sobald $a>b$ ist. Es ist hier der Ort, auf die vorigen Operationen zurückzukommen, da sie zuweilen dergleichen Schwierigkeiten darbieten.

Jede Gleichung vom ersten Grade kann immer dahin gebracht werden, daß ihre sämmtlichen Glieder positiv seien, oder daß sie folgende Form habe

$$ax+b=cx+d \ldots . (1).$$

Anmerkung. Die negativen Glieder wegzuschaffen ist stets möglich, da nichts hindert, auf beiden Seiten eine und dieselbe Größe hinzu zu addiren. Eine solche aber abzuziehen geht nicht in allen Fällen an; die beiden Glieder müssen deshalb größer als jene subtraktive Größe sein.

Nehmen wir nun $cx+b$ auf beiden Seiten der Gleichung (1) weg, so kommt $ax-cx=d-b$, woraus $x=\frac{d-b}{a-c} \ldots . (2).$

Drei Fälle kommen jetzt in Betracht: erstens, wenn $d > b$ und $a > c$; zweitens, wenn nur eine dieser Bedingungen statt hat; drittens, wenn $b > d$ und $c > a$. In dem ersten Falle löst der Werth (2) das Problem auf; in den beiden andern Fällen aber weiß man nicht mehr recht, welchen Sinn man diesem Werthe von x beilegen soll. Dies ist's, was wir hier näher zu untersuchen haben.

Im zweiten Falle ist eine der Subtractionen $d-b$, $a-c$ unmöglich. Es sei z. B. $b > d$ und $a > c$; es ist klar, daß alsdann die Gleichung ungereimt ist, weil die beiden Glieder ax und b des ersten Theils bezüglich größer als die Glieder cx und d des zweiten Theiles sind. Stellt sich also diese Schwierigkeit dar, so wird man überzeugt sein, daß irgend eine Absurdität in der Aufgabe vorkomme, indem die Gleichung ja nicht anders, als eine getreue Uebersetzung jener in die algebraische Sprache ist.

Der dritte Fall findet statt, wenn $b > d$ und $c > a$; man hat alsdann zwei unmögliche Subtractionen. Nun haben wir, um die Gleichung (1) aufzulösen, auf beiden Seiten $cx + b$ abgezogen, was offenbar unmöglich ist, weil jeder Theil an und für sich von $cx + b$ übertroffen wird. Da eine solche Rechnung fehlerhaft war, so wollen wir jetzt $ax + d$ auf beiden Seiten in Abzug bringen; es kommt hierdurch

$b-d=cx-ax$, woraus $x = \dfrac{b-d}{c-a}$ . . . . . (3).

Eine Vergleichung dieser beiden Werthe (2) und (3) zeigt, daß sie nur in so weit sich von einander unterscheiden, als die Zeichen des zweiten oben und unten geändert sind; andere Schwierigkeiten bietet er nicht mehr dar. Stößt man also auf den letztern Fall, so gibt ein solcher zu erkennen, daß man, anstatt die unbekannten Glieder in den ersten Theil zu setzen, sie vielmehr in den zweiten Theil hätte bringen sollen. Um diesen Fehler wieder zu beseitigen, ist es nicht nöthig, die Rechnung von Neuem vorzunehmen; es reicht schon hin, oben und unten die Zeichen des Ausdrucks zu ändern.

Ein Hauptvorzug der Algebra besteht darin, daß sie Formeln für alle Fälle einer Aufgabe, welche Werthe auch die daselbst vorkommenden Zahlen haben mögen, angibt. Diesen Zweck werden wir hier erreichen, in so fern wir die Uebereinkunft treffen, die negativen Größen, wenn sie einzeln stehen, denselben Operationen zu unterwerfen, als wenn sie Theile von mehrnamigen Größen wären. Hätte man also z. B. $m + d - b$ und $b > d$, so würde man

$m - (b - d)$ schreiben; für den Fall, daß m Null und $b > d$ ist, werden wir der Uebereinkunft zufolge ebenfalls $d - b = -(b - d)$ schreiben.

Der Werth von x im zweiten Falle wird hiernach $x = -\frac{b-d}{a-c}$ und wir sagen alsdann: jede negative Auflösung zeigt eine Ungereimtheit an.

Um das Polynom $-a^4 + 3a^2b^2 +$ rc. durch $-a^2 + b^2 +$ rc. zu dividiren, dividirt man Anfangs das erste Glied $-a^4$ durch $-a^2$, wo der Quotient das Zeichen $+$ hat (§. 7). Ganz dasselbe sagen wir von den einzelnen negativen Größen $-a^4$ und $-a^2$; im dritten Falle erhält sonach der Werth (2) von x die Form $\frac{-(b-d)}{-(c-a)}$, was sich auf $\frac{b-d}{c-a}$ reducirt, wie es sein soll (3).

§. 17. Diese Uebereinkunft, die keine Schwierigkeit mit sich führt, vereinigt demnach alle Fälle in der Formel (2). Dabei darf man aber nicht vergessen, die isolirten negativen Größen $-k$, $-\frac{m}{n}$ blos als Resultate der Uebereinkunft, als Symbole (Sinnbilder) zu betrachten, die keine eigentliche Existenz durch sich selbst haben; sie werden nur in einer bestimmten Annahme gebraucht, bei der man sicher ist, einen wichtigen Zweck zu erreichen, ohne daß irgend eine Schwierigkeit dadurch entstände. In der That kann nur eins von beiden Dingen statt finden, nämlich: entweder hat das Resultat das Zeichen $-$ oder es hat das Zeichen $+$. Im ersten Falle schließt man, daß das Problem ungereimt sei, das Zeichen $-$ ist nur das Symbol, das eine solche Ungereimtheit andeutet. Was den zweiten Fall anlangt, so ist bewiesen, daß das Zeichen dasjenige ist, welches es sein soll, obschon es aus der Division zweier negativen Größen herrührt. Hieraus entnehmen wir Folgendes:

1) Man darf sämmtliche Zeichen einer Gleichung ändern, sie auch mit einer negativen Größe multipliciren. Im ersten unserer drei Fälle wird die vorige richtige Gleichung zwar dadurch in eine ungereimte verwandelt; die nachherige Division der negativen Größen bringt jedoch die Dinge wieder auf ihren anfänglichen Zustand zurück. Im zweiten Falle wird die Ungereimtheit der Aufgabe abermals durch einen

negativen Werth angedeutet. Im dritten Fall endlich hebt die Zeichenänderung den Fehler der Rechnung auf.

2) Ist die Gleichung ungereimt, so kann man doch von der im zweiten Falle erhaltenen negativen Auflösung Gebrauch machen. Denn setzt man $-x$ anstatt x, so geht die vorgelegte Gleichung in $-ax + b = -cx + d$ über, woraus $x = \frac{b-d}{a-c}$, ein Werth, der dem Werthe (2) gleichgeltend, aber positiv ist. Wird demnach die Aufgabe in der Art modifizirt, daß die Gleichung ihr genüge, so wird diese anders gestellte Aufgabe, die mit der ersten eine nicht zu verkennende Aehnlichkeit hat, nicht mehr ungereimt sein, und abgesehen vom Zeichen einerlei Auflösung zulassen.

Um die Sache mehr aufzuklären, wollen wie die Aufgabe V vornehmen, und zwar soll sie nun so abgefaßt sein. Ein Vater ist jetzt 42 Jahre, sein Sohn 12 Jahre alt, in wie viel Jahren beträgt das Alter des Vaters das Vierfache von dem des Sohnes? Man hat die Gleichung $42 + x = 4(12 + x)$, woraus $x = -2$; das Problem ist demnach ungereimt. Setzt man aber $-x$ statt x, so wird die Gleichung $42 - x = 4(12 - x)$; die entsprechende Bedingung ändert die Aufgabe in folgende um: Ein Vater ist jetzt 42 Jahre, sein Sohn 12 Jahre alt; vor wie viel Jahren war der Vater viermal so alt als der Sohn? Man erhält $x = 2$.

Eine Zahl zu finden, die durch a dividirt, s als Summe des Dividends, des Divisors und des Quotienten gibt. Man hat die Gleichung $a + x + \frac{x}{a} = s$, woraus $x = \frac{a(s-a)}{a+1}$. Wenn $a > s$, so ist x negativ und die Aufgabe ungereimt, was übrigens leicht vorauszusehen war. Z. B. $a = 11$, $s = 5$ geben $x = -5\frac{1}{2}$. Verwandelt man in der Gleichung aber x in $-x$, so findet man $11 - x - \frac{1}{11}x = 5$; hiernach ist $x = 5\frac{1}{2}$ diejenige Zahl, die sammt ihrem eilften Theile von 11 abgezogen 5 als Rest läßt. Nach dieser Aussage hört die Aufgabe auf, ungereimt zu sein.

Eine Zahl zu finden, deren dritter und fünfter Theil zusammen addirt und um 7 verringert, die Zahl selbst als Rest geben. Man hat $\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x - 7 = x$; woraus $x = -15$. Die Aufgabe ist ungereimt, wird aber $-x$ anstatt x gesetzt (oder vielmehr -7 anstatt $+7$), so findet man, daß 15 diejenige Zahl ist, deren dritter und fünfter Theil, zu 7 addirt, 15 geben.

§. 18. Die Gleichung bietet noch zwei sonderbare Fälle dar. Ist $a = c$, so hat man $x = \frac{d - b}{o}$; bei dieser Annahme geht aber die vorgelegte Gleichung in $ax + b = ax + d$ über, woraus $b = d$. So lange nun b von d sich unterscheidet, ist das Problem absurd; eine ähnliche Modification wie oben ist hier nicht zuläßig. Der Bruch $\frac{m}{n}$ wird größer in dem Maße, als n abnimmt; für $n = \frac{1}{2}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$, werden die Quotienten, bei demselben Werthe von m, 2, 100, 1000 mal größer. Die Grenze ist das Unendliche, das dem Werthe $n = o$ entspricht. Die Aufgabe ist also unmöglich, wenn die Auflösung einen unendlichen Werth hat; man drückt dies durch das Zeichen $x = \infty$ aus.

Hat man aber $a = c$ und $b = d$, so ist $x = \frac{o}{o}$, die vorgelegte Gleichung wird alsdann $ax + b = ax + b$. Beide Seiten sind einerlei, welchen Werth auch x haben mag, das ganz und gar willkührlich ist. Das Problem ist unbestimmt oder läßt eine unendliche Anzahl von Auflösungen zu, wenn man $x = \frac{o}{o}$ findet.

Gleichungen vom ersten Grade mit mehrern Unbekannten.

§. 19. Hat man mehrere Unbekannte und eben so viele Gleichungen, um den Werth jener gesuchten Größen zu finden, so kann man auf verschiedene Art operiren.

I. Man suche aus jeder Gleichung den Werth einer der Unbekannten, als wenn alles Uebrige bekannt wäre; setze die gefundenen Werthe nach einander gleich, und bilde eben so viel Gleichungen weniger eins, als anfänglich da waren. Indem man mit diesen neuen Gleichungen eben so verfährt, wird jedesmal eine unbekannte Größe weggeschafft oder eliminirt. Hat man dann den Werth der letzten Unbekannten bestimmt, so geht man nach und nach wieder zurück, um den Werth der übrigen Unbekannten zu finden.

Man suche z. B. die Werthe aus folgenden zwei Gleichungen:

$$5x - 3y = 1,\ 7y - 4x = 13.$$

Aus der ersten folgt $x = \frac{3y + 1}{5}$,

aus der zweiten.... $x = \frac{7y - 13}{4}$.

Setzt man diese zwei Werthe einander gleich, so hat man $\frac{3y+1}{5} = \frac{7y-13}{4}$, eine Gleichung, die nur eine Unbekannte enthält. Man zieht aus ihr folgende: $12y + 4 = 35y - 65$; dann $35y - 12y = 65 + 4$; oder $23y = 69$; endlich $y = 3$. Geht man zu dem ersten Werthe von x zurück, so erhält man $x = \frac{3 \cdot 3 + 1}{5} = 2$.

Aehnlicherweise werden die drei Gleichungen

$$2x + 5y - 3z = 3,$$
$$3x - 4y + z = -2,$$
$$5x - y + 2z = 9,$$

geben $z = \frac{2x + 5y - 3}{3} = 4y - 3x - 2 = \frac{9 + y - 5x}{2}$.

Werden die Nenner weggeschafft, so finden wir:

$$2x + 5y - 3 = 12y - 9x - 6,$$
$$8y - 6x - 4 = 9 + y - 5x,$$

oder $7y - 11x = 3$, $7y - x = 13$.

Hieraus ziehen wir $7y = 3 + 11x = 13 + x$; woraus $x = 1$. Gehen wir auf die obigen Werthe von y und z zurück, so erhalten wir endlich $y = \frac{3 + 11}{7} = 2$, $z = \frac{2 + 2 \cdot 5 - 3}{3} = 3$.

Anmerkung. Manche nennen diese Methode des Gleichsetzens auch die Comparations-Methode.

II. Die Substitutions-Methode besteht darin, daß man wie vorhin, den Werth einer der Unbekannten sucht, und diesen Werth für jene Unbekannte in den andern Gleichungen substituirt. Man erhält so eine Gleichung und eine Unbekannte weniger; dieses Verfahren wird so weiter fortgesetzt.

Es seien die Gleichungen $3x + 2y = 12$, $2z + y = 5$, $x + y + 3z = 8$ gegeben. Die zweite gibt $y = 5 - 2z$; wird dieser Werth in die übrigen substituirt, so kommt $3x - 4z = 2$, $x + z = 3$.

Die letztern Gleichungen geben $z = 1$ und $x = 2$; woraus $y = 3$.

III. Die erste Methode, obgleich einfacher als die übrigen, wendet man, wegen ihrer Länge, selten an. Die zweite Methode wird in denjenigen Fällen nur angewandt, wo die Unbekannten nicht alle in

den Gleichungen vorkommen. Wir gehen nun zu einer dritten Methode, die am häufigsten gebraucht wird, über.

Es seien die zwei Gleichungen gegeben:

$$ax + by = c,\ a'x + b'y = c' \ldots (A).$$

Wir nehmen $a = a'$ an. Die unbekannte Größe x wird verschwinden, wenn wir die Gleichungen von einander abziehen. Hätten a und a' verschiedene Zeichen, so wird man, um zu demselben Zwecke zu gelangen, die Gleichungen addiren. Sind a und a' nicht einander gleich, so multipliciert man die erste Gleichung mit a', die zweite mit a, um die verlangte Bedingung zu erfüllen: aa' ist alsdann der gemeinschaftliche Coefficient von x.

Anmerkung. Haben a und a' gemeinsame Factoren, so nimmt man zu den respektiven Multiplicatoren bloß die nicht gemeinsamen Factoren von a und a', wie solches bei der Reduktion auf einen gemeinschaftlichen Nenner geschieht.

Werden die multiplicirten Gleichungen von einander abgezogen, so erhält man $a'by - ab'y = a'c - ac'$.

Wir eliminiren eben so y, d. h. wir multipliciren die erste Gleichung mit b', die zweite mit b, ziehen dann die Produkte von einander ab, woraus $a'bx - ab'x = bc' - b'c$.

Wir haben folglich als Endresultat:

$$x = \frac{bc' - b'c}{a'b - ab'},\ y = \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'} \ldots (B).$$

Anmerkung. Diese Additions- oder Subtractions-Methode nennt man vorzugsweise die Elimination.

§. 20. Behandeln wir eben so die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} ax + by + cz &= d, \\ a'x + b'y + c'z &= d', \\ a''x + b''y + c''z &= d'', \end{aligned}\right\} (C),$$

welche die allgemeinen Gleichungen mit 3 Unbekannten darstellen, so würden wir die Werthe von x, y und z finden. Um das Bildungsgesetz der Resultate zu entdecken, wollen wir die Rechnung etwas abändern und sie wie folgt ausführen. Wir multipliciren die erste Gleichung mit k, die zweite mit k', addiren die Produkte und ziehen dann die dritte ab, wir erhalten:

$$(ka + k'a' - a'')\,x + (kb + k'b' - b'')y$$
$$+ (kc + k'c' - c'')\,z = kd + k'd' - d''.$$

Die beliebigen Größen k und k' bestimmen wir so, daß in dem Resultate zwei Unbekannte, z. B. y und z, verschwinden. Wir setzen deshalb die Gleichungen:

$$kb + k'b' = b'', \; kc + k'c' = c'' \; \ldots . (D);$$

sie lehren uns k und k' kennen.

Wir haben auf diese Weise $x = \dfrac{kd + k'd' - d''}{ka + k'a' - a''} \ldots . (E).$

Wir müssen nun k und k' bestimmen und ihre Werthe dann in die letzte Gleichung einführen; die Rechnung läßt sich jedoch bedeutend vereinfachen. Vertauscht man nämlich a, a', a'' bezüglich mit d, d', d'', so wird der Zähler von x aus dem Nenner abgeleitet. Da nun k und k' von diesen Größen unabhängig sind, so wird dasselbe nach der Substitution der Werthe von k und k' gleichfalls noch statt finden.

Es handelt sich folglich darum, den Nenner zu bestimmen, da durch eine einfache Vertauschung von a mit d der Zähler abgeleitet werden kann. Die Formeln (B) auf die Gleichungen (D) angewandt geben

$$k = \frac{b'c'' - c'b''}{cb' - bc'}, \; k' = \frac{cb'' - bc''}{cb' - bc'};$$

woraus $ka + k'a' - a'' = \dfrac{a(b'c'' - c'b'') + a'(cb'' - bc'')}{cb' - bc'} - a''$.

Reduciren wir auf einerlei Nenner, und lassen solchen weg, da er beiden Gliedern des Bruches (E) gemeinschaftlich ist, so finden wir folgenden Werth für den gesuchten Nenner:

$$K = a(b'c'' - c'b'') + a'(cb'' - bc'') + a''(bc' - cb').$$

Betrachten wir die hier auszuführenden Multiplicationen mit Aufmerksamkeit, so bemerken wir, daß die Rechnung sich auf folgende Operationen reducirt. Man nimmt die Differenz $bc - cb$ zwischen den beiden Versetzungen der Buchstaben b und c, läßt darauf den Buchstaben a, auf der linken Seite anfangend, durch alle Stellen gehen, mit der Vorsicht, bei dem Stellenwechsel jedesmal die Zeichen zu verändern; $+bc$ erzeugt so $+abc$, $-bac$ und $+bca$; $-cb$ so $-acb$, $+cab$ und $-cba$.

Man vereinigt endlich diese sechs Glieder, bezeichnet dabei den zweiten Buchstaben mit einem Accent, und den dritten mit zwei, und findet so

$$ab'c'' - ba'c'' + bc'a'' - ac'b'' + ca'b'' - cb'a'',$$

ein Resultat, welches mit K einerlei ist.

Um y zu finden, wird man ähnlicherweise in der obenstehenden Gleichung die Coefficienten von x und z = Null setzen; die Symmetrie der Rechnung zeigt aber, daß es hinreichend ist, in dem Werthe von x, b mit a zu vertauschen. Für den Werth von z werden c und a unter sich vertauscht.

Hieraus folgern wir erstens, daß der Nenner der Werthe von x, y und z derselbe ist; zweitens daß man den Zähler für jede Unbekannte aus dem Nenner dadurch ableitet, indem man die Coefficienten dieser Unbekannten gegen die ganz bekannten Glieder vertauscht.

Die gesuchten Werthe erhalten sonach folgende Formen:

$$x = \frac{db'c'' - bd'c'' + bc'd'' - dc'b'' + cd'b'' - cb'd''}{K},$$

$$y = \frac{ad'c'' - da'c'' + dc'a'' - ac'd'' + ca'd'' - cd'a''}{K},$$

$$z = \frac{ab'd'' - ba'd'' + bd'a'' - ad'b'' + da'b'' - db'a''}{K},$$

Das hier gezeigte Bildungsgesetz folgt unmittelbar aus der Rechnung selbst. Für vier Unbekannte mit vier Gleichungen

$$ax+by+cz+dt=f,\ a'x+b'y+c'z+d't=f',\ \text{u. s. w.},$$

ist es blos nöthig, den Nenner zu suchen; jeder Zähler wird alsdann aus dem Nenner abgeleitet. Die Bildungsweise des Nenners ist die hier oben angegebene. Man nimmt also die sechs Versetzungen der Buchstaben abc des oben stehenden Nenners mit Hinweglassung der Accente, oder die sechs Produkte $abc - bac + bca - acb + cab - cba$; führt alsdann den Buchstaben d in jedes dieser Glieder ein, wobei man ihn, auf der linken Seite anfangend, nach und nach alle Stellen einnehmen läßt, mit der Vorsicht, bei einem solchen Stellenwechsel von d jedesmal die Zeichen zu verändern; endlich gibt man jedem zweiten Buchstaben einen Accent, dem dritten zwei und dem vierten drei Accente. Der gemeinschaftliche Nenner hat demnach die Form:
$da'b''c''' - ad'b''c''' + ab'd''c''' - ab'c''d''' - db'a''c''' + bd'a''c''' -$ ꝛc.

Anmerkung. Der Ausdruck des gedachten Nenners für vier Unbekannte mit vier Gleichungen wird aus 24 Gliedern, der für fünf Unbekannte aus 120, der für sechs Unbekannte aus 720 Gliedern bestehen u. s. w., so daß für n Unbekannte mit n Gleichungen der Werthausdruck jeder Unbekannten im Zähler und Nenner $1.2.3\ldots(n-1).n$ Glieder enthalten wird.

Diese Methode, die Gleichungen mit unbestimmten Factoren zu multipliciren, um alle Unbekannten weniger eine mit einem mal zu eliminiren, rührt von Bezout her.

Wir geben hier einige Aufgaben:

I. Eine Person hat Rechenpfennige in Händen; nimmt sie einen davon aus der rechten in die linke Hand, so hat sie in beiden gleich viel. Nimmt sie aber zwei aus der linken in die rechte Hand, so hat sie in der letzten doppelt so viel als in der andern. Wie viel Rechenpfennige hatte die Person in jeder Hand?

Man findet $x - 1 = y + 1$, und $x + 2 = 2(y - 2)$; woraus $x = 10$ und $y = 8$.

II. Jemand kauft drei Edelsteine; der Preis des ersten plus der Hälfte des Preises der beiden andern macht 25 Louisd'or; der Preis des zweiten plus dem Drittel des Preises der andern beträgt 26 Louisd'or; endlich macht der Preis des dritten plus der Hälfte des Preises der übrigen 29 Louisd'or. Wie theuer ist jeder Edelstein?

Man hat $x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 25$; $y + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z = 26$; $z + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 29$; woraus $x = 8$, $y = 18$, $z = 16$.

III. *A*, *B*, *C* haben eine gewisse Anzahl Thalerstücke; gibt *A* von seinen Thalern an *B* und *C* so viel, als jeder schon hat; dann gibt *B* von den seinigen an *A* so viel, als derselbe übrig behalten, und so viel an *C*, als derselbe jetzt in Händen hat; endlich gibt *C* gleichfalls von *B* und *C* ab und zwar jedem so viel, als dieser eben hat. Es stellt sich nun heraus, daß sie sämmtlich gleich viel haben, nämlich jeder 16 Thaler. Wie viel hatte jeder anfänglich? Bezeichnen x, y und z die Zahl der Thaler des *A*, *B* und *C* vor diesen Vertheilungen, so findet man die drei Gleichungen: $x - y - z = 4$, $3y - x - z = 8$, $7z - x - y = 16$; woraus: $x = 26$, $y = 14$, $z = 8$.

IV. Drei Zahlen aus folgenden Angaben zu finden: Wenn zur Hälfte der zweiten drei Viertel der dritten plus 31,4 addirt werden, so ist die Summe gleich der ersten; wird zur ersten die Hälfte der dritten plus 9,5 addirt, so ist die Summe gleich der zweiten; wird aber von der zweiten die Hälfte der ersten sammt 158,5 abgezogen, so ist die Differenz gleich der dritten. Wird die erste Zahl durch x, die zweite durch y, die dritte durch z dargestellt, so haben wir die drei Gleichungen:

$x = \frac{1}{2}y + \frac{3}{4}z + 31{,}4$; $y = x + \frac{1}{2}z + 9{,}5$; $z = y - \frac{1}{2}x - 158{,}5$. Hieraus finden wir $x = 523{,}7$; $y = 646{,}05$; $z = 225{,}7$.

§. 21. Es kommt zuweilen vor, daß eine Gleichung nur dadurch existiren kann, daß sie sich in zwei andere abtheilt. Z. B. $x^2 + y^2 = 0$ gibt $x = 0$ und $y = 0$, weil zwei positive Quadrate sich nicht gegenseitig aufheben und die Summe Null machen können. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$ liefert eben so $x = 1$ und $y = 2$. Obschon hier der Form nach eine einzige Gleichung vorlag, so waren im Grunde genommen doch deren zwei vorhanden. Ganz dasselbe gilt von folgender Aufgabe, die nur eine einzige Bedingung enthält. Zwei Zahlen sollen aus folgenden Eigenschaften berechnet werden. Wird zu dem Quadrate der einen und dem fünffachen Quadrate der andern 9 addirt, so ist das Resultat dem Produkte aus dem Doppelten der zweiten Zahl mit dem um 3 vermehrten Zweifachen der ersten Zahl gleich. Man hat

$5x^2 + y^2 + 9 = 2x(2y + 3)$, oder

$4x^2 - 4xy + y^2 + x^2 - 6x + 9 = 0$, oder

$(2x-y)^2 + (x-3)^2 = 0$; folglich $2x - y = 0$, und $x - 3 = 0$; mithin $x = 3$, und $y = 6$.

Aus ähnlichen Gründen ist die Gleichung $x^2 + y^2 + 1 = 0$ unmöglich.

§. 22. Wir führen jetzt einen sehr merkwürdigen Fall vor, wo die Gleichung in zwei andere zerfällt.

Wir nehmen an, daß die Gleichung $A + \alpha = B + \beta$ die Verbindungsweise der Elemente einer Aufgabe ausdrückt, daß ferner mehrere dieser Elemente zugleich veränderlich sind, dabei aber jene Gleichung in allen möglichen Zuständen ihrer Größe bestehen soll; daß endlich einige Glieder A, B beständig bleiben, während die andern α, β veränderlich sind, und zugleich so klein werden können, als man nur will. Unter solchen Voraussetzungen zerfällt unsere Gleichung in zwei andere, nämlich in eine $A = B$, wo die beständigen Glieder vorkommen, und in eine zweite $\alpha = \beta$, in welchen die veränderlichen Glieder eintreten, und die für alle Werthe von α und β statt finden wird. In der That wäre A und B ungleich, so hätte man $A - B = \pm K$, wo K ihren Unterschied bezeichnet; hieraus $\beta - \alpha = \pm K$; die veränderlichen Größen β und α hätten folglich eine bestimmte

Differenz K, würden mithin nicht kleiner als K werden können, was gegen die Annahme ist.

Auf diesem Prinzip beruht die Methode der Grenzen, von der wir in der Folge häufig Gebrauch machen werden. Kann eine veränderliche Größe $A - \alpha$ einer andern bestimmten unveränderlichen Größe A so nahe kommen, daß ihr Unterschied α kleiner als irgend eine gegebene Größe sei, ohne daß sie jedoch jemals vollkommen gleich werden, so wird die zweite A eine Grenze der ersten $A - \alpha$ genannt. Uebrigens thut man wohl daran, bei jedesmaliger Anwendung dieses Satzes die obenangeführte Schlußreihe zu wiederholen, um dadurch die erforderliche Klarheit in die Resultate zu bringen; wir ersuchen den Leser, diesem Rathe Folge zu leisten, wovon er den Nutzen einsehen wird. Wir geben nun über diesen Satz ein Paar Anwendungen, die ganz geeignet sind, den Gang der Rechnung und des Raisonnements zu zeigen.

I. Es seien $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ zwei incommensurable Größen, z und t ihre Näherungswerthe, x und y die Differenzen zwischen diesen Werthen und den Wurzelgrößen. Man hat also $z = \sqrt{a} - x$, $t = \sqrt{b} - y$. Nun sind die rationalen Produkte $z \times t$ und $t \times z$ einander gleich, folglich $\sqrt{a} \times \sqrt{b} \pm \alpha = \sqrt{b} \times \sqrt{a} \pm \beta$, wo α und β sämmtliche Glieder darstellen, in denen x und y als Factoren vorkommen. Setzt man die Annäherung immer weiter fort, so nehmen die Fehler x und y stets ab, und dies um so viel, als man nur immer will, wobei übrigens die Gleichung nicht aufhört statt zu finden; die Factoren $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ bleiben unveränderlich, während α und β fortwährend abnehmen. Die Gleichung zerfällt demnach in zwei andere: $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{b} \times \sqrt{a}$, und $\alpha = \beta$; d. h. man kann eben so gut die Ordnung der irrationalen Factoren, als die der rationalen verwechseln.

II. Es werde der Werth S des periodischen Decimalbruchs 0,[54] (Arith. §. 51) verlangt. Wird die Periode nur zweimal genommen und durch k der Werth der vernachlässigten Brüche dargestellt, so hat man $S - k = 0{,}5454$. Wird mit 100 multiplicirt, so kommt $100\,S - 100\,k = 54{,}54$, und, beide Gleichungen von einander abgezogen, $99\,S - 99\,k = 54 - \frac{54}{10000}$. Hätte man aber drei- oder viermal die Periode genommen, so würde das letzte Glied $\frac{54}{(100)^3}$ oder $\frac{54}{(100)^4}$ gewor-

den sein; man sieht also, daß dieses Glied und der Fehler k immer kleiner und kleiner werden können, wenn man eine größere Anzahlmal die Periode nimmt. Unsere letzte Gleichung läßt sich folglich auf die Form $99\ S - \alpha = 54 - \beta$ bringen, woraus $99\ S = 54$ und $S = \frac{54}{99}$, was wir schon wußten. Ueberdem hat man $\alpha = \beta$, welches auch die in Betracht gezogene Anzahl der Perioden sein mochte. In der That nimmt man zweimal die Periode, z. B. $k = 0{,}0000(54)$, woraus $100^2\ k = 0{,}[54] = \frac{54}{99}$ und $99\ k = \frac{54}{10000}$, oder $\alpha = \beta$.

Es sei $S = 0{,}(p)$, wo die Periode p aus n Ziffern besteht; man hat $10^n\ S = p{,}(p)$, und ähnlich wie vorhin $(10^n - 1)\ S = p$, woraus

$$S = \frac{p}{10^n - 1} = \frac{p}{999\ldots} \quad \text{(Arith. §. 53.)}$$

§. 23. Die Formeln (B) bieten einige sonderbare Fälle dar, die wir näher untersuchen wollen. So lange die Werthe von x und y positiv sind, ergibt sich die Auflösung aus den Formeln; es entsteht weder Zweifel noch Schwierigkeit. Es kann aber auch anders sein, und dies führt auf drei Ausnahmen unserer Gleichungen (B).

1) x oder y kann negativ sein; die Aufgabe ist alsdann unter der gegebenen Form ungereimt, man kann sie aber mittelst einer einfachen Modification, die darin besteht, das Zeichen dieser Unbekannten in den Gleichungen (A) zu ändern, möglich machen. Die Rechnung bringt in der That die Aufgabe auf nur eine Unbekannte zurück, worauf das in §. 16 Gesagte seine Anwendung findet.

2) Wenn die Formeln unendlich sind, so haben die Coefficienten solche numerische Werthe, aus denen $a'b - ab' = 0$, oder $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$ sich ergibt. Um die Natur der Aufgabe hier besser zu erkennen, müssen wir diese Bedingung in die Gleichungen (A) einführen. Setzen wir deshalb $\frac{ab'}{b}$ anstatt a', so wird die zweite dadurch $\frac{ab'}{b}\ x + b'y = c'$; im gegenwärtigen Falle sind also die vorgelegten Gleichungen $ax + by = c$, $b'\ (ax + by) = bc'$.

Sie stimmen aber nur in so fern überein, als $b'c = bc'$, oder $\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$. Diese Relation kann nun statt finden, oder sie kann es nicht; im letztern Fall ist das Problem unmöglich, weil die Bedingungen der Aufgabe im Widerspruche stehen; dieser Umstand wird

durch die unendlichen Werthe von x und y angedeutet. Die Coefficienten bilden alsdann eine Proportion $a : a' = b : b'$, an welche das Verhältniß der bekannten Glieder c und c' sich nicht anknüpfen läßt.

3) Hat man aber ausser der Relation, welche den Nenner Null macht, oder ausser der Gleichung $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$ auch noch die Gleichung $\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$, so sind die beiden Gleichungen (A) einerlei, die beiden Bedingungen der Aufgabe drücken ein und dasselbe aus. Man hat also nur eine Gleichung und zwei Unbekannte, die Aufgabe ist folglich unbestimmt. Solches ereignet sich, wenn die Coefficienten der Gleichungen drei unter sich gleiche Verhältnisse $a : a' = b : b' = c : c'$ bilden; dieser Fall wird durch die Werthe von x und y unter der Form $\frac{0}{0}$ zur Evidenz gebracht.

$A \quad d \quad B \qquad\qquad C \quad k \quad D \quad D' \quad k \quad C'$

Als Erläuterungs-Beispiel wählen wir folgende Aufgabe: Zwei Boten gehen zur nämlichen Zeit, der eine von A, der andere von B aus, in einer und derselben Richtung AC; der erste macht m Kilometer, der zweite n Kilometer in einer Stunde; die anfängliche Entfernung ist $AB = d$. Wir wollen die Zeit aufsuchen, in welchen die Boten in einer Entfernung $CD = k$ von einander abstehen. A macht den Weg $AC = x$ in einer durch $\frac{x}{m}$ angegebenen Zeit; eben so macht B den Weg $BD = y$ in einer durch $\frac{y}{n}$ angedeuteten Zeit. Sind die Boten gleichzeitig der eine in C, der andere in D, so ist $\frac{x}{m} = \frac{y}{n}$ woraus $nx = my$. Auf der andern Seite aber $AD = x + k = y + d$. Die Eliminination gibt $x = \frac{m(d-k)}{m-n}$, $y = \frac{n(d-k)}{m-n}$; die dazu erforderliche Stundenzahl ist $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{d-k}{m-n}$. — Macht man $k = 0$, so hat man den Ort und die Zeit des Zusammentreffens beider Boten.

Die Boten werden jedoch abermals um k von einander entfernt sein, nachdem A an B vorbeigegangen ist; alsdann hat der eine den Weg $AC' = x$, der andere den Weg $BD' = y$ zurückgelegt, und es ist $x - k = y + d$. Man hat also nur nöthig, eine Zeichenänderung

mit k in unsern Gleichungen vorzunehmen. Es ist dies eine zweite Auflösung der Aufgabe.

Um die Aufgabe allgemeiner zu machen, wollen wir annehmen, daß die Boten schon seit einiger Zeit unterwegs sind und A und B Trefforte darstellen. Ist dann der Werth von y negativ, was bei $m < n$ und $d > k$ statt findet, so zeigt dies an, daß der Ort des zweiten Boten links von B gelegen ist, im Falle seine Entfernung vom ersten k beträgt; dieser Moment geht der Ankunft in B vorher.

Gehen die Boten in entgegengesetzter Richtung, so reicht es hin, n und y negativ zu nehmen, wovon man sich auf direkte Weise überzeugen kann. — Man sehe in der ebenen Trigonometrie, was wir dort über den Gebrauch der negativen Zeichen sagen werden.

Wenn $m = n$, so sind x und y unendlich, und das Problem ist unmöglich; es rührt dies daher, daß die Boten bei gleicher Geschwindigkeit die vorgeschriebene Bedingung nicht erfüllen können. Ist überdem $A = k$, so sind x und y $\frac{0}{0}$, und es gibt unendlich viele Trefforte. In der That ändert sich die Entfernung der von einem und demselben Orte ausgegangenen Boten nicht.

Von den Ungleichheiten.

§. 24. Die Ausdrücke, in denen das Zeichen $>$ vorkömmt, um anzudeuten, daß eine Anzahl größer als eine andere ist, sind Ungleichheiten. Da die Differenz, wenn man die nämliche Zahl addirt und abzieht, dieselbe bleibt, so darf man auf beiden Seiten einer Ungleichheit Gleiches addiren oder subtrahiren, ohne sie zu ändern, folglich sie auch den nämlichen Rechnungen, wie die Gleichungen (§. 14) unterwerfen; d. h. sämmtliche Glieder mit einer und derselben Zahl multipliciren oder dividiren, und irgend ein Glied auf die andere Seite mit entgegengesetztem Zeichen bringen. — Es sei $3x - 7 > x + 11$. Wird auf beiden Seiten 7 addirt und x abgezogen, so kommt $3x - x > 11 + 7$, oder $2x > 18$, woraus $x > 9$. Die Aufgabe, eine Zahl von solcher Beschaffenheit zu finden, daß ihr dreifaches Produkt um 7 verringert die Zahl plus 11 übertreffe, hat demnach unendlich viele Auflösungen, weil jede Zahl, die größer als 9 ist, ihr Genüge thut.

Jede der verschiedenen Ungleichheiten, die x enthalten, bestimmt eine Grenze dieser Unbekannten; sind nun dergleichen Grenzen in einem und demselben Sinne genommen; d. h. z. B. $x > 9$ und $x > 7$, so ist

die Berücksichtigung einer einzigen dieser Ungleichheiten ausreichend. Finden dagegen derlei Grenzen in entgegengesetztem Sinne statt, d. h. z. B. $x > 9$ und $x < 15$, so gelten für x nur die dazwischen liegenden Werthe. Es können dergleichen Grenzen sogar einander gegenseitig ausschließen, wie z. B. $x > 4$ und $x < 3$; das Problem ist alsdann unmöglich und enthält Bedingungen, die sich widersprechend sind. — Eine Zahl größer als 15 von solcher Beschaffenheit zu finden, daß ihr Dreifaches plus 1 kleiner als ihr Doppeltes + 20 sei; daß überdies, wenn von der Zahl 1 abgezogen und zu ihr 3 addirt wird, der Quotient der Differenz durch die Summe den Bruch $\frac{4}{5}$ übertreffe. Diese Bedingungen werden folgendermaßen geschrieben: $x > 15$, $3x + 1 < 2x + 20$, $\frac{x-1}{x+3} > \frac{4}{5}$.

Wir ziehen hieraus $x > 15$, $x < 19$ und $x > 17$. Da die Zahl zwischen 17 und 19 liegt, so ist die erste der gegebenen Bedingungen überflüssig: für x kann man also nehmen $17\frac{1}{2}$, $17\frac{2}{3}$...., und eine unendliche Anzahl anderer Werthe. Soll x aber eine ganze Zahl sein, so läßt das Problem nur eine Auflösung zu, nämlich $x = 18$.

§. 25. Hat man $a < b$ und $a' < b'$, so folgt offenbar hieraus

$$a + a' < b + b',\ a - b' < b - a',\ aa' < bb',$$

$$\frac{a}{b'} < \frac{b}{a'},\ a^n < b^n,\ \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b};$$

man kann also zwei Ungleichheiten, bei denen die Zeichen des Ungleichseins in demselben Sinne genommen sind, Glied für Glied addiren und multipliciren; man kann ferner mit einer Ungleichheit eine Potenzerhebung und eine Wurzelausziehung vornehmen, dieselben Zeichen des Ungleichseins werden in den Resultaten beibehalten; man kann endlich zwei Ungleichheiten, bei denen die Zeichen in umgekehrtem Sinne genommen sind, Glied für Glied subtrahiren und dividiren, im Resultate wird dasjenige Zeichen, welches dem Minuend und Dividend angehört, beibehalten.

Der Ausdruck a nicht $> b$, welcher andeutet, daß a nicht größer als b sein darf, wird öfters auch folgendermaßen geschrieben: $a \overline{\overline{<}}\ b$; er ist denselben Regeln wie die einfachen Ungleichheiten unterworfen. Welche Zahl z. B. ist es, deren Dreifaches, um 2 vermindert, nicht kleiner als 7 sein, und deren Zehnfaches weniger 1 nicht das Sechsfache

der Zahl plus 11 übersteigen soll. Diese Bedingungen werden folgendermaßen geschrieben:

$$3x - 2 \geqq 7,\ 10x - 1 \leqq 11 + 6x, \text{ woraus}$$

$$3x \geqq 7 + 2,\ 10x - 6x \leqq 11 + 1;$$

also $x =$ oder > 3, und $x =$ oder < 3, oder vielmehr $x = 3$.

§. 26. Wir schließen mit einer wichtigen Bemerkung. Lassen wir x in dem Ausdrucke $a - x$ sich ändern. In dem Maße als x wächst und sich a nähert, nimmt $a - x$, welches positiv ist, ab, und wird endlich Null, wenn $x = a$; fährt x zu wachsen fort, so wird $a - x$ negativ. Wir wollen diese Umstände dadurch anzeigen, indem wir schreiben $a - x > 0$, so lange $a - x$ positiv ist; und $a - x < 0$, sobald x größer als a ist. Wir wollen hiermit nicht sagen, daß es Größen geben könne, die kleiner als Null seien. Wenn wir aber übereinkommen, dergleichen Ungleichheiten späterhin nach Art der Gleichungen zu behandeln, so wird offenbar die eine $a > x$, die andere $a < x$ geben; es ist dieses also nichts anders als eine bloße Schreibart, um anzuzeigen, daß $a - x$ in dem einen Falle positiv, und im zweiten negativ ist. Wir sehen hiernach die negativen Größen kleiner als Null, und die positiven größer als Null an; es ist dieses eine bloße Uebereinkunft, die geeignet ist, die Rechnung zu vereinfachen.

Da $a - x > 0$ gibt $-x > -a$ und $a > x$, so sieht man, daß die Zeichen sämmtlicher Glieder einer Ungleichheit nur in so fern geändert werden dürfen, als man $>$ in $<$ umändert, und umgekehrt; ohne eine ähnliche Vertauschung eintreten zu lassen, können auch beide Seiten einer Ungleichheit mit einer negativen Größe nicht multiplicirt werden. Es entsteht hierdurch ein wichtiger Unterschied zwischen den Rechnungen, denen die Ungleichheiten unterworfen sind, und denen, welche für die Gleichungen gelten: 1, 2, 3, 4.... sind zunehmende Größen, während $-1, -2, -3, -4\ldots$ abnehmende Größen sind; man hat $4 < 5$ und $-4 > -5$.

Anmerkung. Eine Ungleichheit wird als unverändert geblieben betrachtet, wenn da, wo Größeres stand, auch wieder Größeres steht. Werden beide Seiten einer Ungleichheit durch gleiches Negatives dividirt, so wird sie umgekehrt; d. h. das Größere steht jetzt da, wo das Kleinere stand.

Unbestimmte Aufgaben.

§. 27. Ist die Zahl der Gleichungen mit der der Unbekannten nicht einerlei, so können zwei Fälle statt finden.

Erster Fall. Sind mehr Unbekannte als Gleichungen vorhanden, so heißt die Aufgabe eine unbestimmte (diophantische) Aufgabe, weil man ganz willkührliche Werthe einigen Unbekannten beilegen kann, bis deren nur so viele übrig bleiben, als Gleichungen vorhanden sind; die Elimination gibt dann die zugehörigen Werthe dieser übrigen Unbekannten. Der Auflösungen, welche den Gleichungen oder dem Probleme Genüge thun, dessen Bedingungen in diesen Gleichungen ausgedrückt sind, werden demnach unzählig viele sein. Wir wollen z. B. zwei Zahlen x und z suchen, deren Summe 70 betrage; wir müssen demnach zwei Zahlen finden, die der einzigen Gleichung $x + z = 70$ Genüge leisten. Aus dieser Gleichung folgt $x = 70 - z$, und es läßt sich x nur bestimmen, wenn z gegeben ist. Setzt man nach und nach 1, 2, $3\frac{1}{2}$.... anstatt z, so findet man $x = 69$, 68, $66\frac{1}{2}$....; folglich entsprechen der aufgestellten Bedingung die Paare 1 und 69, 2 und 68, $3\frac{1}{2}$ und $66\frac{1}{2}$...., und noch eine unzählige Menge theils ganzer, theils gebrochener Zahlen.

Drei Zahlen x, y, z zu finden, deren Summe 105 betrage, und deren Differenzen zwischen je zwei gleich seien. Man hat also $x + y + z = 105$, $x - y = y - z$, d. h. drei Unbekannte und nur zwei Gleichungen. Ziehen wir diese Gleichungen, um x zu eliminiren, von einander ab, so haben wir die vorige Aufgabe wieder; wir haben $y = 35$, woraus $x + z = 70$. Setzen wir nun für z oder x einen beliebigen Werth, so wird die andere mittelst dieser letzten Gleichung bestimmt sein; diese Zahlen sind gleichzeitig mit $y = 35$ die Auflösungen der Aufgabe.

Es sei noch die Gleichung $x^2 - ax = y^2 - ay$ gegeben; aus ihr folgt $x^2 - y^2 + ay - ax = 0$, oder $(x+y)(x-y) - a(x-y) = 0$, oder $(x-y)(x+y-a) = 0$, weil $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ ist.

Das Produkt $(x-y)(x+y-a)$ wird Null, wenn einer seiner Factoren es ist; man hat also nach Belieben die Gleichung $x = y$ oder $x = a - y$. Legt man y alle möglichen Werthe bei, so erhält man die Werthe von x, welche allein die Aufgabe befriedigen; es ist hinreichend, daß die zwei Unbekannten gleich seien, oder daß ihre Summe a betrage, was auf unendlich viele Arten geschehen kann.

Die Alligationsrechnung kann an diese Lehre sich anreihen. Wir nehmen an, daß zwei Substanzen mit einander vermischt werden, bei denen keine chemische Einwirkung eintritt. Wenn p und q die Preise der Einheit einer jeden, x und y die Menge der gemischten Einheiten bedeuten, so wird $px + qy$ der Preis und $x + y$ die Quantität der ganzen Mischung sein; der Preis z jeder Einheit der letztern ist also $z = \frac{px + qy}{x + y}$ . . . . (F).

So geben 8 Bouteillen Wein zu 15 Sous, mit 12 Bouteillen Wein zu 10 Sous vermischt, 20 Bouteillen, deren Werth $8 \times 15 + 12 \times 10 = 240$ Sous beträgt; folglich der Preis einer Bouteille $= \frac{240}{20} = 12$ Sous.

4 Kilogr. 0,95 feinhaltigen Goldes werden mit 5 Kilogr. 0,86 feinhaltigen Goldes zusammengeschmolzen; wie viel feinhaltig ist die Mischung? Die obige Formel gibt $z = \frac{4 \times 0{,}95 + 5 \times 0{,}86}{4 + 5} = 0{,}9$.

Anmerkung. Enthält das Gold oder Silber $\frac{1}{10}$ Zusatz, so daß das Uebrige reines Metall ist, so sagt man, das Metall hat 0,9 Feingehalt.

Man drückt gewöhnlich den Feingehalt des Silbers dadurch aus, daß man angibt, wie viel Loth à 18 Gran reines Silber in einer Mark enthalten sind. Darnach ist z. B. 10 löthiges Silber solches, das in der Mark 10 Loth reines Silber und 6 Loth Zusatz enthält. — Den Feingehalt des Goldes drückt man dadurch aus, daß man angibt, wie viel Karat reines Gold in einer Mark zu 24 Karat enthalten sind. Darnach ist 23 karatiges Gold solches, das in der Mark 23 Karat reines Gold und 1 Karat Zusatz enthält. — Der Werth einer Münze wird durch ihren Gehalt an reinem Metalle bestimmt. Das Gewicht einer Münze wird das Schrot, und der Gehalt an reinem Metalle das Korn genannt.

Verlangt man umgekehrt die Quantität der Mischung bei einer gegebenen Qualität derselben, so sucht man die Quantitäten x und y der einzelnen Theile mittelst der bekannten Preise, p, q und z. Die Gleichung (F) enthält dann zwei Unbekannte, das Problem ist demnach unbestimmt. Man hat $x = \left(\frac{z-q}{p-z}\right)y$; die Werthe $x = z - q$, und $y = p - z$ erfüllen die Aufgabe; z liegt übrigens zwischen p und q.

4 *

Man kann ausser diesen Werthen unzählig viele andere finden, wenn man die erstern mit einer und derselben beliebigen Zahl multiplicirt.

Ein Bäcker z. B. will Brod zu 8 Kreuzer das Pfund liefern; wie viel Waizenmehl zu 10 Kreuzer, und wie viel Kornmehl zu 7 Kreuzer das Pfund muß er dazu nehmen?

Man schreibt diese drei Zahlen in der hier angegebenen Darstellung; setzt 8—7 oder 1 neben 10, dann 10—8 oder 2 neben 7: der Aufgabe entsprechen so 2 ℔ Kornmehl und 1 ℔ Waizenmehl; desgleichen 4 und 2, 6 und 3, u. s. w.

$$\text{Mittlerer Preis } 8 \left\{ \begin{array}{l} 10 \ldots 1 \text{ Waizenmehl.} \\ 7 \ldots 2 \text{ Kornmehl.} \end{array} \right.$$

Hat man zur Bestimmung des Problems eine zweite Bedingung, so wird solche in die algebraische Sprache übertragen, darauf zwischen der Gleichung (F) und der neuen die Elimination verrichtet. Wäre z. B. die Quantität $x + y$ der Mischung gegeben und gleich m, so hätte man

$$x + y = m, \text{ und } px + qy = zm;$$

$$\text{woraus } x = \frac{m}{p-q}(z-q), \; y = \frac{m}{p-q}(p-z).$$

Die oben erhaltenen Werthe von x und y werden folglich mit $\frac{m}{p-q}$ multiplicirt. Soll in unserm vorigen Beispiele die Quantität Mehl 21 ℔ betragen, so multiplicirt man die daselbst gefundenen Resultate 1 und 2 mit $\frac{21}{10-7} = 7$. 7 ℔ Waizenmehl zu 10 Kreuzer mit 14 ℔ Kornmehl zu 7 Kreuzer das Pfund vermischt, geben hiernach 21 ℔ Mehl zu 8 Kreuzer.

Will man ebenso 7,54 Kilogr. 0,9 feinhaltigen Silbers aus 0,97 und 0,84 feinhaltigem Silber erhalten, so zeigt die Rechnung, daß man 3,48 Kilogr. von der ersten und 4,06 Kilogr. von der zweiten Sorte dazu braucht.

$$0{,}9 \left\{ \begin{array}{l} 0{,}97 \ldots 0{,}06 \times \frac{7{,}54}{0{,}13} = 3{,}48 \\ 0{,}84 \ldots 0{,}07 \times \frac{7{,}54}{0{,}13} = 4{,}06 \end{array} \right.$$

Leicht läßt sich diese Lehre auf den Fall ausdehnen, wo man mehrere Substanzen mit einander vermischen will.

Zweiter Fall. Hat man mehr Gleichungen als Unbekannte, so ist das Problem mehr als bestimmt; d. h. eliminirt man alle Unbe-

kannte, so bleibt unter nur bekannten Größen eine gewisse Anzahl von Gleichungen übrig, welche diese Bekannten erfüllen müssen und die deshalb Bedingungsgleichungen heißen. Werden diese Gleichungen nicht erfüllt, so ist die Aufgabe unmöglich; werden sie aber befriedigt, so fallen einige der gegebenen Bedingungen mit einander zusammen; die Bedingungen sind in gleicher Anzahl mit den Unbekannten vorhanden und werden durch ebenso viele besondere Gleichungen ausgedrückt, auf welche sich die vorgelegten reduciren.

Zwei Zahlen x und y zu finden, deren Summe s, Differenz d und Produkt p sei; man hat also $x+y=s$, $x-y=d$, und $xy=p$. Die zwei ersten Gleichungen geben $x=\frac{1}{2}(s+d)$, $y=\frac{1}{2}(s-d)$. Werden diese Werthe in die dritte Gleichung substituirt, so findet man $4p=s^2-d^2$. Leisten die gegebenen Größen s, d und p dieser Relation kein Genüge, so ist das Problem unmöglich; existirt aber eine solche Relation, so ist eine der gegebenen Gleichungen unnöthig, da sie eine Bedingung ausdrückt, die von selbst statt findet und in den beiden andern enthalten ist.

Welcher Bruch ist es, der so beschaffen ist, daß er sich, wenn zum Zähler m addirt wird, in $\frac{a}{b}$, und wenn m' zum Nenner addirt wird, in $\frac{a'}{b'}$, verwandelt? Sind x und y die beiden Glieder des gesuchten Bruches, so hat man

$$\frac{x+m}{y}=\frac{a}{b} \text{ und } \frac{x}{y+m'}=\frac{a'}{b'}.$$

Die Elimination gibt

$$(ab'-a'b)\ x=a'\ (bm+am'), (ab'-a'b)\ y=b\ (b'm+a'm').$$

Da x und y ganze Zahlen sind, so ist $ab'-a'b=\pm 1$, oder dieses Binom ein Theiler der zweiten Glieder. Man hat folglich eine Bedingung zu erfüllen, ohne welche die Aufgabe unmöglich ist, obschon man ebenso viele Gleichungen als Unbekannte hat.

§. 28. Wir wollen sämmtliche ganzzahlige Werthe von x und y finden, die der unbestimmten Gleichung $ax+by=A$.... (1) entsprechen, wo a, b, A gegebene ganze positive oder negative Zahlen bezeichnen. Diese müssen so beschaffen sein, daß die beiden ersten a und b Primzahlen unter sich sind; denn hätten sie einen gemeinschaftlichen Factor d, so würde, indem man Alles durch d dividirte, hieraus

erfolgen, $\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y = \frac{A}{d}$. Da das erste Glied eine ganze Zahl sein soll, so muß eine solche auch das zweite sein, das Problem wäre folglich unmöglich, wenn A nicht durch d theilbar wäre; findet letzteres aber statt, so kann man den gemeinschaftlichen Factor der Gleichung weglassen.

Es sei $x = \alpha$ und $y = \beta$ eine Auflösung der Gleichheit, oder $a\alpha + b\beta = A$; zieht man diese Gleichung von der vorgelegten $ax + by = A$ ab, so kommt $a(x-\alpha) = -b(y-\beta)$; da aber a und b Primzahlen unter sich sind, so muß $y-\beta$ ein Vielfaches von a (Arithmetik §. 25), oder $y-\beta = at$ sein. Durch dieses Mittel haben wir zur Bestimmung von x und y folgende zwei Gleichungen:

$$x = \alpha - bt,\ y = \beta + at \quad \ldots . \ (2).$$

Werden diese Werthe in die Gleichung (1) eingeführt, so sieht man, daß sie derselben entsprechen, welchen positiven oder negativen Werth die ganze Zahl t auch haben mag. Jene Ausdrücke sind ferner die einzigen, welche eine solche Eigenschaft besitzen; denn sei $x = \alpha'$, $y = \beta'$ eine andere Auflösung, oder $a\alpha' + b\beta' = A$; wird sie von $a\alpha + b\beta = A$ abgezogen, so kommt $a(\alpha' - \alpha) = -b(\beta' - \beta)$; folglich $\beta' - \beta$ ein Vielfaches at von a, woraus $\beta' = \beta + at$, $\alpha' = \alpha - bt$, Werthe, die in der Formel (2) enthalten sind.

Hieraus folgt, daß man aus einer gefundenen Auflösung (α und β) alle übrigen ableiten kann, indem man $t = 0, 1, 2 \ldots$ setzt. Die Werthe von y und die von x bilden also, wie man sieht, zwei arithmetische Progressionen, deren Verhältnisse oder Differenzen die gegenseitigen Coefficienten b und a, der eine mit entgegengesetztem Zeichen genommen, sind. Beide Progressionen werden wachsende sein, wenn a und b verschiedene Zeichen haben, im andern Falle wird die eine eine wachsende, die andere eine abnehmende.

§. 29. Die Aufgabe ist also darauf zurückgeführt, eine Auflösung $x = \alpha$ und $y = \beta$ zu finden. Wir wollen $a > b$ annehmen, die Gleichung in Bezug auf y dann auflösen, und die in den Brüchen enthaltenen Ganzen ausziehen; wir werden so haben

$$y = \frac{A - ax}{b} = k - lx + \frac{B - cx}{b},$$

wo k und l die Quotienten, B und c die Reste der Division von A und a durch b sind. Die Aufgabe läuft jetzt darauf hinaus, die Werthe

von x zu finden, die $B-cx$ durch b theilbar machen. Wäre nun $c=1$, so würde, wenn man $\frac{B-x}{b} = z$ setzt, wo z eine ganze Zahl ist, $x = B - bz$ sein, und jeder ganze Werth für z ebenfalls ganze Werthe für x und y geben; man hätte also das Problem gelöst. Wäre hingegen $c>1$, so setzt man $\frac{B-cx}{b} = z$, wo z abermals eine ganze Zahl ist. Es handelt sich nun darum, die Gleichung $bz+cx=B$, wo $c<b$ durch ganze Zahlen aufzulösen. Man verfährt folglich wie oben, d. h. man löst die Gleichung in Bezug auf x auf, zieht die Ganzen heraus; es wird so kommen

$$x = \frac{B-bz}{c} = k' - l'z + \frac{C-dz}{c},$$

wo k' und l' die Quotienten, C und d die Reste bei der Division von B und b durch c sind. Der letzte Bruch muß eine ganze Zahl u sein; er gibt, wenn $d=1$, $C-z=cu$, $z=C-cu$, und nimmt man für u nur ganze Zahlen, so wird man auch nur solche für z, x und y finden. Ist aber $d>1$, so setzt man $\frac{C-dz}{c} = u$, $z = \frac{C-cu}{d}$, u. s. w. Die Coefficienten der successiven Unbekannten z, u, v.... sind offenbar die Reste, welche man bei der Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Theilers von b und a erhält (Arith. §. 23). Da die letzten Größen b und a Primzahlen unter sich sind, so ist man überzeugt, im Endresultate zu einem Coefficienten $= 1$ zu gelangen, was eine Relation von der Form $v + gs = G$ zwischen den Ganzen v und s geben wird. Nimmt man für s ganze Zahlen, so wird man auch die Werthe von v, von u, z, x und y in ganzen Zahlen finden. Man hat also eine Auflösung des Problems gefunden; die Gleichungen (2) finden jetzt ihre Anwendung. Ein Beispiel wird dies erläutern. Die Gleichung $8x-27y=7$ gibt $x=\frac{7+27y}{8} = 3y + \frac{3y+7}{8}$; man setze $\frac{3y+7}{8} = z$, woraus $y = \frac{8z-7}{3} = 2z - 2 + \frac{2z-1}{3}$; man setze $\frac{2z-1}{3} = u$, woraus $z = \frac{3u+1}{2} = u + \frac{u+1}{2}$; endlich mache man $\frac{u+1}{2} = v$, woraus $u = 2v - 1$. Nimmt man z. B.

$v = 1$, so erhält man $u = 1$, $z = 2$, $y = 3$, $x = 11$: die Formeln (2) werden dann $x = 11 + 27t$, $y = 3 + 8t$. Hätte man für v irgend eine andere ganze Zahl genommen, so würde man zu denselben Werthen gelangen, obgleich sie dem Anschein nach von einander verschieden sind. Nimmt man $v = -3$, so findet man $u = -7$, $z = -10$, $y = -29$, $x = -97$, woraus $x = -97 + 27t$, $y = -29 + 8t$; setzt man aber $t + 4$ anstatt t, so kommt man auf die obigen Werthe wieder zurück. Nimmt man $t = \ldots -2$, $-1, 0, 1, 2 \ldots$, so findet man wachsende, nach beiden Richtungen ins Unendliche fortlaufende Progressionen, deren Differenzen 27 und 8 sind, und deren je zwei sich entsprechende Glieder eben so viele Auflösungen der Aufgabe abgeben; andere Auflösungen läßt die Aufgabe nicht zu.

$$x = \ldots -43, -16, 11, 38, 65, 92 \ldots$$
$$y = \ldots -13, -5, 3, 11, 19, 27 \ldots$$

§. 30. Wir wollen sämmtliche Rechnungsoperationen mit Hinweglassung der Raisonnements, auf denen sie beruhen, hier kurz zusammenstellen. Wir erhielten die successiven Brüche:

$$y = \frac{A - ax}{b},\ x = \frac{B - bz}{c},\ z = \frac{C - cu}{d},\ u = \frac{D - dv}{e} \ldots (M),$$

die sich auf ganze Zahlen reduciren müssen; die Factoren $c, d, e \ldots$ sind, so wie die Größen $B, C, D \ldots$ Reste von Divisionen. Wir bringen diese Größen in nachstehende Darstellung, aus der wir eine leichte Methode zur Auffindung der Werthe von $y, x, z, u, v \ldots$ in ganzen Zahlen ableiten werden.

$$\left.\begin{array}{llllllll} a & b & c & d & e & f & g & \text{rc.} \ldots 1 \\ A & B & C & D & E & F & \text{rc.} \ldots\ldots & 0 \\ y & x & z & u & v & s & \text{rc.} \ldots\ldots & 0 \end{array}\right\} (N).$$

Die erste Linie, welche die Divisoren, Dividenden und Reste bei der Operation des größten gemeinschaftlichen Theilers von a und b (Arith. §. 23) enthält, führt nothwendigerweise auf ein letztes Glied $= 1$. Die zweite Linie wird gebildet wie folgt: setze das zweite Glied A der vorgelegten Gleichung unter a, dividire A durch b, schreibe den Rest B unter b; dividire darauf B durch c, setze C unter c; dividire C durch d u. s. w., dergestalt, daß die Divisoren successive die nämlichen, als die in der ersten Linie sind. Die Quotienten werden nicht

weiter berücksichtigt, da man sie nicht braucht. — Was die dritte Linie anlangt, so besteht sie aus den Werthen von y, x, z.... in ganzen Zahlen, welche, auf der rechten Seite angefangen, nach den in den Gleichungen (M) enthaltenen Vorschriften gefunden werden. Um also z zu finden, muß man vorerst u berechnet haben, dann den ganzen Quotienten $\frac{C-cu}{d}$ suchen, welchen man unter C schreibt. Alle diese Brüche von einerlei Form reduciren sich auf ganze Zahlen, wenn man auf die Zeichen der Produkte, Differenzen und Reste gehörige Rücksicht nimmt. Man schreibt den Werth β für y unter den Coefficienten a von x, und den für x unter den Coefficienten b von y, und erhält so eine Auflösung der Gleichung (1); diese Werthe weroen endlich den Gleichungen (2) gemäß durch die Vielfachen $-bt$ und at vervollständigt.

Man muß bemerken, daß, da der letzte Divisor der ersten Linie 1 ist, der ihm darunter entsprechende Rest Null ist, die zweite Linie sich also damit schließt; der vorhergehende Rest gibt sonach den Werth des letzten ganzen Quotienten. Es sei die Gleichung $328x + 229y = 1741$:

328	229	99	31	6	1
1741	138	39	8	2	0
105	-68	30	-9	2	0
y	x	z	u	v . . .	

Man sucht den gemeinschaftlichen Theiler zwischen den Coefficienten 328 und 229; die successiven Reste geben die Zahlen der ersten Linie. Man schreibt das zweite Glied 1741 unter 328, dividirt durch 229, schreibt den Rest 138 unter diesen Divisor; dividirt 138 durch 99, schreibt den Rest 39 unter 99; dividirt 39 durch 31, schreibt den Rest 8 unter den Divisor 31 u. s. w. Der Rest 2 ist der Werth der letzten Unbekannten; dann sagt man $2 \times 31 = 62$, was von 8 abgezogen -54 gibt; dividirt man -54 durch 6, so ist der Quotient -9 der Werth von u; $-9 \times 99 = -891$ von 39 abgezogen gibt den Rest $+930$; dividirt durch 31 erhält man den Quotienten 30, den Werth von z, u. s. w. zurück. Man findet so $y = 105$, $x = -68$, woraus $y = 105 - 328t$, $x = -68 + 229t$. Für die Gleichung $370x + 153y = 2001$ hat man:

370	153	64	25	14	11	3	2	1
2001	12	12	12	12	1	1	1	0
—103	+48	—20	+8	—4	+4	—1	+1	0
y	x	z	v	u	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .

Folglich $y = -103 + 370t$, $x = 48 - 153t$.

Vorstehende Rechnungen setzen voraus, daß in der vorgelegten Gleichung sämmtliche Glieder positiv seien; findet solches nicht statt, so nimmt man mit entgegengesetzten Zeichen den Werth derjenigen Unbekannten, deren Coefficient das Zeichen — hat. Auf solche Art erhält man die Auflösung der Gleichung $ax - by = A$, oder $-ax + by = A$, wo A positiv ist. Die Gleichung $370x - 153y = 2001$ gibt hiernach $y = 103 + 370t$, $x = 48 + 153t$.

Wir wollen noch die Gleichung $29x - 47y = 112$ auflösen:

47	29	18	11	7	4	3	1
112	25	7	7	0	0	0	0
—1	+3	—1	+1	0	0	0	0
x	y	z	u	v			

Die letzte Unbekannte ist Null; dasselbe gilt auch von den vorhergehenden bis auf $v = \frac{7}{7} = 1$, u. s. w.; wird das Zeichen von y geändert (wegen $-47y$), so hat man

$$x = -1 + 47t,\ y = -3 + 29t.$$

§. 31. Die in Frage stehenden Gleichungen lassen sich zuweilen vereinfachen:

1) Haben a und A einen gemeinschaftlichen Factor m, so erhält man, wenn die Gleichung durch m dividirt wird, $\frac{ax}{m} + \frac{by}{m} = \frac{A}{m}$. Nun muß $\frac{by}{m}$ eine ganze Zahl sein, weil die andern Glieder solche sind; y ist also ein Vielfaches von m. Setzen wir $y = my'$, so werden wir eine einfachere, als die vorgelegte Gleichung erhalten, wenn wir durch m dividiren.

Es sei $1200x - 67y = 1000$. Man setze $y = 200y'$ und dividire dann die Gleichung durch 200; es kommt $6x - 67y' = 5$, woraus man herleitet $y' = -5$, $y = -1000$, $x = -55$; folglich

$$y = -1000 + 1200t,\ x = -55 + 67t.$$

In der Gleichung $44x - 35y = 165$, da 44 und 165 den Factor 11, 35 und 165 den Factor 5 haben, setze man $y = 11y'$, $x = 5x'$,

was $4x' - 7y' = 3$ gibt. Man findet dann $y' = -1$, $x' = -1$; woraus $y = -11 + 44t$, $x = -5 + 35t$.

2) Man bemerke, daß in jeder Aequidifferenz A, $A + b$, $A + 2b$, sämmtliche Reste, die man bei der Division der a ersten Glieder durch a erhält, verschieden sein werden, wenn a und b Primzahlen unter sich sind. In der That, würden zwei Glieder einerlei Rest lassen, so müßte ihre Differenz durch a theilbar sein (Arith. §. 16), was ungereimt ist, da diese Differenz die Form kb hat, wo $k < a$. Die a verschiedenen Reste fallen daher nothwendig, aber in veränderter Ordnung, mit den Zahlen 0, 1, 2, 3 ... $(a-1)$ zusammen. Einer der Dividenden $A + lb$ gibt also Null als Rest, oder ist ein Vielfaches von a; $y = l$ bringt demnach $\frac{A + by}{a}$ auf eine ganze Zahl. Nun ereignet es sich öfters, daß man bei der Substitution von 0, 1, 2, 3 ... für y den Werth $l < a$, der solcher Bedingung entspricht, entdeckt. Um also $\frac{3y + 7}{8}$ (erstes Beispiel) auf eine ganze Zahl zu bringen, setzt man $y = 0, 1, 2, 3 \ldots$; die Reste von $3y + 7$ durch 8 dividirt sind 7, 2, 5, 0 ... Jedes Glied der letztern Reihe wird erhalten, indem man -3 dem vorhergehenden Reste hinzufügt und 8 in der Summe wegstreicht, wenn sie 8 übertrifft. Man sieht, daß $y = 3$ der gesuchte Werth ist. Uebrigens kann man dies nur als ein Probiren ansehen, das sich häufig weitläufiger als die allgemeine Methode herausstellt. Um $y = \frac{35 + 19x}{12} = 2 + x + \frac{11 + 7x}{12}$ in ganzen Zahlen zu finden, setzen wir $x = 0, 1, 2 \ldots$; der letzte Bruch führt zu den Resten 11, 6, 1, 8, 3, 10, 5, 0 ..., indem man fortwährend 7 hinzufügt und 12 wegnimmt, wenn es angeht. Auf solche Art findet man, daß $x = 7$ einen ganzen Quotienten $y = 14$ gibt, hieraus $y = 14 + 19t$, $x = 7 + 12t$.

§. 32. Es ereignet sich zuweilen, daß die Aufgabe nur positive Resultate haben kann. In solchen Fällen darf man nicht mehr alle ganzen Zahlen für t, sondern nur diejenigen nehmen, welche $\alpha - bt > 0$, $\beta + at > 0$ geben (§. 16); diese Ungleichheiten bestimmen die Grenzen von t.

1) Finden dergleichen Grenzen in einem und demselben Sinne statt, so reduciren sie sich auf eine einzige, und der Gleichung kann

durch unendlich viele, fortwährend größere Werthe Genüge geleistet werden; in diesem Falle haben a und b verschiedene Zeichen, weil sonst $ax + by$ nicht immer gleich c bleiben könnte. Im ersten Beispiele des §. 29 hat man $t > -\frac{11}{27}$ und $> -\frac{3}{8}$; man kann also $t = 0, 1, 2\ldots$ setzen, ihm aber keinen negativen Werth beilegen. — Im zweiten Beispiele des §. 30 hat man $t = 0$ oder > 0, nämlich $t = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$.

2) Haben die Grenzen in verschiedenen Richtungen statt, so sucht man die dazwischen liegenden Werthe, welche t annehmen kann, und der Aufgabe genügt nur eine bestimmte Anzahl von Auflösungen; x wächst, wenn y abnimmt, was erfordert, daß a und b einerlei Zeichen haben. Es kann sich sogar ereignen, daß diese Grenzen sich gegenseitig ausschließen; es ist dann unmöglich, die Aufgabe in ganzen Zahlen zu erfüllen. Im ersten Beispiele des §. 30 hat man $t < \frac{105}{328}$ und $t > \frac{68}{229}$; eine Auflösung in positiven Zahlen ist also unmöglich.

Anmerkung: 1) Die Gleichung $ax + by = -c$, wo a, b und c positiv sind, kann durch kein Paar positive Zahlen erfüllt werden.

2) Der Gleichung $ax + by = c$, wo a, b und c positiv sind, und $a + b > c$ kann nicht durch ganze positive Zahlen Genüge geschehen, den Fall ausgenommen, wo c durch a oder durch b theilbar ist; alsdann wird die Gleichung durch Null und eine positive ganze Zahl erfüllt.

Nun einige Anwendungen von vorstehender Lehre:

I. Die Zahl 117 dergestalt in zwei Theile zu theilen, daß der eine durch 19 und der andere durch 7 theilbar sei. Man hat $19x + 7y = 117$; woraus $y = \frac{117 - 19x}{7}$; folglich $\frac{5 - 5x}{7}$, oder $\frac{5(1-x)}{7}$ eine ganze Zahl. Setzt man $x = 1$, so findet man $y = 14$; dieses gibt $x = 1 - 7t$ und $y = 14 + 19t$. Will man die negativen Zahlen ausschließen, so muß $1 - 7t > 0$ und $14 + 19t > 0$ sein; woraus $t < \frac{1}{7}$ und $> -\frac{14}{19}$. In diesem Falle kann man der Aufgabe nur auf eine einzige Art genügen: $t = 0$ gibt $x = 1$ und $y = 14$; 19 und 98 sind demnach die gesuchten Theile.

II. Man will 2000 fl. mit zweierlei Art von Gefäßen, die einen zu 9 fl., die andern zu 13 fl. das Stück, bezahlen. Man findet

$9x + 13y = 2000$; woraus $x = \frac{2000 - 13y}{9}$; $\frac{2 - 4y}{9}$, oder $\frac{1 - 2y}{9}$ muß eine ganze Zahl werden, dieses gibt $y = -4$, hieraus $x = 228$; endlich $x = 228 - 13t$, $y = -4 + 9t$. Die negativen Werthe von y zeigen an, wie viel Gefäße von der zweiten Sorte man gegen die zur Entrichtung der 2000 fl. hingegebenen der ersten Sorte in Empfang nimmt. Soll x und y positiv sein, so muß man $228 - 13t > 0$ und $-4 + 9t > 0$ setzen, woraus $t < 18$ und > 0. Setzt man $t = 1, 2, 3 \ldots 17$, so erhält man die 17 Auflösungen der Aufgabe, $x = 215, 202, 189 \ldots . 7$; $y = 5, 14, 23 \ldots . 149$. Man kann also 215 Gefäße zu 9 fl. und 5 Gefäße zu 13 fl. geben, ꝛc.

III. Ein Kaufmann tauschte Rubel gegen Dukaten um und legte hierbei noch 15 Francs darauf. Wenn der Rubel zu 4 Francs und der Dukaten zu 9 Francs angenommen wird, so fragt sich, auf wie vielerlei Art ein solcher Tausch vor sich gehen könnte? Man hat $9y = 4x + 15$; es ergibt sich hieraus $x = \frac{9y - 15}{4}$; also $\frac{y - 3}{4} = t$; und $y = 4t + 3$, $x = 9t + 3$. Sollen x und y positiv sein, so fallen die Grenzen von t zusammen, und es ist $t > -1$. Nichts begrenzt hier die Werthe von x und die von y; setzt man successive $t = 0, 1, 2 \ldots$, so findet man $x = 3, 12, 21 \ldots$, $y = 3, 7, 11 \ldots$; man kann also 3 Rubel gegen 3 Dukaten, oder 12 Rubel gegen 7 Dukaten einwechseln, u. s. w.

IV. $6x - 12y = 7$ kann nicht in ganzen Zahlen aufgelöst werden, weil der gemeinschaftliche Theiler 6 von 6 und 12 kein Theiler von 7 ist.

Aehnliches findet bei der Gleichung $2x + 3y = -10$ statt, wenn x und y positiv sein sollen. Die Rechnung weißt dies übrigens nach, indem sie gibt $x = 3t - 5$ und $y = -2t$; die Grenzen $t > \frac{5}{3}$ und < 0 können nicht zusammen bestehen.

V. Der Bruch $\frac{n}{d}$, dessen Nenner $d = ab$ das Produkt zweier Primzahlen unter sich a und b ist, in zwei Theile zu theilen. Man setzt deshalb $\frac{n}{d} = \frac{x}{b} + \frac{y}{a}$, hat demnach die Gleichung ax

$+ by = n$ in ganzen Zahlen aufzulösen. — Für den Bruch $\frac{58}{77}$ hat man $11x + 7y = 58$, da $77 = 11$ mal 7; daraus ergibt sich $x = 7t - 3$, $y = 13 - 11t$. Soll $\frac{58}{77}$ die Differenz der beiden gesuchten Brüche sein, so ist die Zahl der Auflösungen unbegrenzt. Soll $\frac{58}{77}$ aber die Summe zweier Brüche sein, so ist nur eine einzige Auflösung zulässig, die dem Werthe $t = 1$ entspricht; dieses gibt $\frac{58}{77} = \frac{4}{7} + \frac{2}{11}$.

VI. Die Summe von 50 fl. in Zweiguldenstücken und Dreihalbguldenstücken zu bezahlen. Man hat die Gleichung $2x + \frac{3}{2}y = 50$, oder $4x + 3y = 100$; es ergibt sich daraus $x = 1 - 3t$, $y = 32 + 4t$. Setzt man $t = 0, -1, -2, \ldots$ bis -8, so findet man $x = 1, 4, 7 \ldots$, $y = 32, 28, 24 \ldots$. Nimmt man auch die negativen Werthe von x oder die von y, so sind die Zweiguldenstücke als gegen die Dreihalbguldenstücke zurückgegeben zu betrachten, wodurch eine Differenz von 50 fl. entsteht.

§. 33. Die auseinandergesetzte Methode läßt sich immer anwenden, wenn man 3, 4... Unbekannte und eben so viele Gleichungen weniger eine hat. Hierüber einige Beispiele:

VII. Eine Zahl N zu finden, welche durch 5 dividirt zum Rest 4, durch 7 dividirt zum Rest 2 lasse, d. h. die Zahl, welche die Ausdrücke $\frac{N-4}{5}$ und $\frac{N-2}{7}$ zu ganzen Zahlen macht. Bezeichnen wir die respektiven Quotienten durch x und y, so haben wir $N = 5x + 4$, $N = 7y + 2$; woraus $7y - 5x = 2$. Löst man diese Gleichung mittelst des angegebenen Verfahrens auf, so findet man $x = 7t + 1$, $y = 5t + 1$, was $N = 35t + 9$ gibt. Die gesuchte Zahl ist also eine aus der Reihe: 9, 44, 79 .... Man würde leicht zum Endresultate gelangt sein, wenn man bedenkt, daß $N = 4$ den ersten Bruch in eine ganze Zahl umwandelt, und daß sämmtliche Zahlen, welche diesen Bedingungen genügen, von der Form $N = 4 + 5v$ sind. Für v kann man aber nur diejenigen Werthe nehmen, welche die Größen $\frac{N-2}{7}$ oder $\frac{5v+2}{7}$ zu einer ganzen Zahl machen. Man sieht auf der Stelle, daß $v = 1$, überhaupt $v = 1 + 7t$ ist, folglich durch Substitution $N = 9 + 35t$.

VIII. Man zählt die Blätter eines Buches dreimal hinter einander, das erste Mal je sieben, wo 1 übrig bleibt, das zweite Mal je 10, wo 6 übrig bleiben, das dritte Mal je 3, wo nichts übrig bleibt.

Wie viel Blätter hatte das Buch? Man nimmt an, daß die Anzahl derselben zwischen 100 und 300 liegt.

Es handelt sich also darum, eine Zahl N zu finden, welche die Größen $\frac{N-1}{7}$, $\frac{N-6}{10}$ und $\frac{N}{3}$ zu ganzen Zahlen macht. Der letzte Bruch gibt $N = 3z$, die zwei andern werden dadurch $\frac{3z-1}{7}$, $\frac{3z-6}{10}$; der letzte gibt $z = 2 + 10v$; der andere wird dadurch $\frac{5+30v}{7}$ oder $4v + \frac{5+2v}{7}$; folglich $v = 1 + 7t$, woraus $z = 12 + 70t$; endlich $N = 36 + 210t$. Setzt man $t = 0, 1, 2 \ldots$, so findet man $N = 36, 246, 456 \ldots$ das Buch hat also 246 Blätter.

IX. Welche Zahlen lassen durch 2, 3 und 5 dividirt nach der Reihe die Reste 1, 2 und 3? Man findet $N = 30t + 23$; also $N = 23, 53, 83, 113 \ldots$

X. Die drei Größen $\frac{121x-41}{504}$, $\frac{9x+1}{35}$ und $\frac{27x-11}{16}$ in ganzen Zahlen aufzulösen. Man kann die Rechnung, wie folgt, vereinfachen: Da $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$, $35 = 7 \cdot 5$, $16 = 2^4$, so zerlegt man die drei Brüche in

$$\frac{121x-41}{2^3},\ \frac{121x-41}{3^2},\ \frac{121x-41}{7},\ \frac{9x+1}{7},\ \frac{9x+1}{5},\ \frac{11(x-1)}{16},$$

$$\text{oder}\ \frac{x-1}{8},\ \frac{4x-5}{9},\ \frac{2x+1}{7},\ \frac{2x+1}{7},\ \frac{4x+1}{5},\ \frac{x-1}{2^4},$$

wenn die Ganzen herausgezogen werden. Man läßt den dritten Bruch, der mit dem vierten einerlei ist, weg, desgleichen den ersten, der in dem letzten enthalten ist; denn $x-1$ kann nicht durch 16 theilbar sein, ohne es auch durch 8 zu werden. Es bleibt also noch übrig, die Größen $\frac{4x-5}{9}$, $\frac{2x+1}{7}$, $\frac{4x+1}{5}$, $\frac{x-1}{16}$ in ganzen Zahlen aufzulösen.

Der erste Bruch gibt $x = -1 + 9t$, dadurch wird der zweite in $\frac{18t-1}{7}$ oder $\frac{4t-1}{7}$ umgeändert; also $t = 2 + 7t'$, und $x = 17 + 63t'$. Der dritte Bruch wird dadurch $\frac{2(2+t')}{5}$, woraus $t' = -2 + 5t''$, und $x = -109 + 315t''$. Der vierte Bruch gibt end-

lich $\frac{2+11t''}{16}$, woraus $t'' = 10 + 16z$; und endlich $x = 3041 + 5040z$ für jeden beliebigen ganzen Werth von z.

Hat man nur eine Gleichung und drei Unbekannte, so operirt man wie folgt: Es sei $5x + 8y + 7z = 50$. Setzt man $50 - 7z = u$, so hat man $5x + 8y = u$, woraus man, indem u als gegeben betrachtet wird, $x = 8t - 3u$ und $y = 2u - 5t$ ableitet; wird für u sein Werth $50 - 7z$ eingeführt, so kommt $x = 21z + 8t - 150$, $y = 100 - 14z - 5t$, in welchen Ausdrücken z und x beliebige ganze Zahlen sind.

Es sei noch die Gleichung $7x + 5y - 3z = 209$; hieraus $z = 2x + 2y - 69 + \frac{x-y-z}{3}$; $\frac{x-y-z}{3} = t$; dann $y = x - 3t - 2$, $z = 4x - 5t - 73$, wo t und x willkührliche ganze Zahlen sind.

Drittes Kapitel.

Von den Potenzen, den Wurzeln und den Gleichungen des zweiten Grades.

Potenzen und Wurzeln der Monome.

§. 34. Mittelst der im §. 60 der Arithmetik gegebenen Regel wird die Erhebung auf Potenzen dadurch vereinfacht, daß man die wiederholte Multiplication vermeidet. Denn soll a auf die Potenz $m = n + p$ erhoben werden, so hat man $a^m = a^n \times a^p$; bildet man also die Potenzen a^n und a^p, so gibt ihr Produkt a^m. Eben so kann man m in 3 Theile $n + p + q$ zerlegen, woraus $a^m = a^n \times a^p \times a^q$, u. s. w.

§. 35. Aus den Regeln der Multiplication (§. 5) folgt: daß die Potenz eines Monoms gebildet wird, wenn man den

Exponenten jedes Buchstaben mit dem Grad dieser Potenz multiplicirt. Hiernach

$$(2ab^2)^2 = 4a^2b^4;\ \left(\frac{3a^2b^3}{cd^2}\right)^5 = \frac{3^5a^{10}b^{15}}{c^5d^{10}}.$$

Man zieht hieraus ein leichtes Mittel, gewisse Potenzen von Zahlen zu bilden; denn a^m kommt auf $a^{np} = (a^n)^p$ zurück, wenn $m = np$ ist. Hat man $m = npq \ldots$, so bildet man die $n$te Potenz von a, die $p$te Potenz von a^n, die $q$te Potenz von $a^{np} \ldots$ Aehnlicherweise verfährt man bei der Wurzelausziehung; so z. B. findet man $\sqrt[12]{531441}$, weil $12 = 3 \cdot 2 \cdot 2$ dadurch, daß man vorerst die Quadratwurzel auszieht, was 729 gibt, dann von 729 die Quadratwurzel nimmt, welche 27 ist; endlich aus 27 die Cubikwurzel zieht, was $3 = \sqrt[12]{531441}$ gibt.

Um umgekehrt die $m$te Wurzel aus einem Monom zu ziehen, darf man nur diese Wurzel aus jedem Factor besonders ziehen; eine solche Wurzel findet man, indem man jeden Exponenten durch m dividirt. In der That, damit a^2b^3 die Cubikwurzel von a^6b^9 sei, ist es erforderlich, daß a^2b^3 auf den Cubus erhoben, a^6b^9 wieder hervorbringe; dies findet aber nach der vorhergegangenen Regel statt, wenn die Exponenten durch 3 dividirt wurden.

$$\sqrt{(4a^2b^4)} = 2ab^2;\ \sqrt[5]{\left(\frac{243a^{10}b^5}{c^5d^{10}}\right)} = \frac{3a^2b}{cd^2}.$$

Sobald der Grad der Wurzel gerade ist, so kann diese Wurzel sowohl mit dem Zeichen +, als mit dem Zeichen — behaftet sein; $\sqrt{9} = \pm 3$. Es kommt dies daher, weil, insofern eine Zahl m die Wurzel von 9 sein soll, es, algebraisch gesprochen, hinreicht, wenn $m^2 = 9$, was statt findet, welches von beiden Zeichen m auch haben mag. Ist hingegen der Grad der Wurzel ungerade, so haben Potenz und Wurzel ein und dasselbe Zeichen.

$$\sqrt[3]{-27} = -3,\ \sqrt[5]{+243} = +3.$$

Anmerkung. Die Richtigkeit der eben ausgesprochenen Behauptung erhellt aus Folgendem:

Man hat $(\pm a)^{2n} = ((\pm a)^2)^n = (a^2)^n = a^{2n}$.

Ferner $(\pm a)^{2n+1} = (\pm a)^{2n} \cdot (\pm a) = a^{2n} \cdot (\pm a) = \pm a^{2n+1}$.

Hieraus nun $\sqrt[2n]{a} = \pm w$; $\sqrt[2n+1]{a} = + w$;

und $\sqrt[2n+1]{-a} = - w$.

§. 36. Mit den Wurzelausdrücken lassen sich öfters Vereinfachungen vornehmen.

Beispiele. $\sqrt[3]{432}=2\sqrt[3]{54}=3\sqrt[3]{16}=6\sqrt[3]{2}$; $\sqrt{Nq^2}=q\sqrt{N}$

$$\sqrt[5]{\left(\frac{c^6d^8}{a^5}\right)}=\frac{cd}{a}\sqrt[5]{cd^3};\ \sqrt{(3a^2-6ab+3b^2)}=(a-b)\sqrt{3};$$

$$\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}+2\sqrt{a}-3\sqrt[3]{b}=3\sqrt{a}-2\sqrt[3]{b};\ \sqrt{75}-4\sqrt{3}=\sqrt{3};$$

$$\sqrt[4]{x^2y}-a\sqrt[4]{x^2y}+b\sqrt[4]{x^2y}=(1-a+b)\sqrt[4]{x^2y};\ \sqrt{75a^3b^2}-4\sqrt{3a^3b^2}$$
$$=ab\sqrt{3a};\ \sqrt{27a^3b}-\sqrt{3a^3b^5}=a(3-b^2)\sqrt{3ab};$$

$$\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}+\frac{f}{g}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}=\frac{ag+bf}{bg}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}.$$

§. 37. Um die Wurzel aus einem Produkte zu erhalten, muß man, nachdem was wir hier oben gesehen haben, die Wurzel desselben Grades aus jedem seiner Factoren ziehen. Es ist dies auch noch wahr, wenn die Wurzeln sich nicht mehr genau ausziehen lassen. Z. B. $\sqrt[3]{a^2b}=\sqrt[3]{a^2}\times\sqrt[3]{b}$, weil der Cubus der letztern Größe offenbar erhalten wird, wenn man jeden Factor auf jene Potenz erhebt, was a^2b gibt. Ueberhaupt ist $\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{ab}$, da die Wurzel einer Größe aus dem Produkte der Wurzeln von ihren Factoren gebildet wird (§. 5). Um folglich zwei Wurzelausdrücke von einerlei Grad (gleichnamige Radicalgrößen) mit einander zu multipliciren oder dividiren, muß man das Produkt oder den Quotienten, der unter dem Wurzelzeichen stehenden Größen bilden und jenem ein Wurzelzeichen des nämlichen Grades geben. Vermittelst dieser Regel findet man:

$$\sqrt{6}\times\sqrt{8}=\sqrt{48}=4\sqrt{3};\ \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}=\frac{1}{2}.$$

$$\sqrt[n]{5x^2y^4}\times\sqrt[n]{20ax}=\sqrt[n]{100ax^3y^4};\ \frac{\sqrt{11}}{4\sqrt{33}}=\frac{\sqrt{11}}{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{11}}=\frac{1}{4\sqrt{3}};$$

$$\sqrt[n]{p}\times\sqrt[n]{-q}=\sqrt[n]{-pq};\ \frac{\sqrt[n]{ax}}{\sqrt[n]{bxy}}=\sqrt[n]{\frac{a}{by}};$$

$$a\sqrt[5]{\frac{b}{a}}=\sqrt[5]{a^4b};\ (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab};$$

$(a+\sqrt{b})^3=a^3+3a^2\sqrt{b}+3ab+b\sqrt{b}$; $(\sqrt{a^nb^m})^2=a^nb^m$, indem man das Wurzelzeichen wegläßt.

§. 38. Da es keine Größe gibt, die mit sich selbst multiplicirt, ein negatives Resultat hervorbringt, so stellt $\sqrt{-m}$ eine unmögliche Operation dar; man nennt deshalb einen solchen Ausdruck einen imaginären Ausdruck, während $\sqrt{m}$ ein reeller Ausdruck heißt.

Wir werden in der Folge Gelegenheit haben zu bemerken, daß dergleichen Symbole, die eigentlich keinen Sinn haben, nichts destoweniger zu sehr wichtigen Betrachtungen Anlaß geben. Solche Symbole addiren, subtrahiren.... sind Operationen, von denen es schwer hält, gehörige Rechenschaft abzulegen; man ist jedoch übereingekommen, jene Rechnungen mit derlei imaginären Ausdrücken vorzunehmen, als ob sie wirkliche Größen wären, indem man sie denselben Regeln wie letztere unterwirft; wir werden späterhin den Nutzen von solchen Operationen einsehen.

Anmerkung. Ueberhaupt ist jede gerade Wurzel aus einer negativen Größe ein imaginärer Ausdruck, weil keine positive oder negative Größe denkbar ist, welche auf eine gerade Potenz erhoben, ein negatives Resultat gibt (§. 35). Also $\sqrt[2n]{-a} = \sqrt[2n]{a} \times \sqrt[2n]{-1}$ ein imaginärer Ausdruck.

$-a^2$ ist eigentlich kein Quadrat, sondern ein bloßes Produkt, weil $-a^2 = +a \times (-a)$; ebenso ist $-a^{2n}$ ein bloßes Produkt.

Die Regel des vorigen §. unterliegt hier einigen Modificationen. So ist $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$ nicht anders als das Quadrat von $\sqrt{-a}$, sichtbar demnach $-a$; dagegen gibt die obige Regel unmittelbar angewendet als Produkt $\sqrt{(-a \times -a)} = \sqrt{a^2}$ oder a. Um diese Schwierigkeit zu heben, bemerken wir, daß die Zweideutigkeit des Zeichens im Allgemeinen nur dann statt hat, wenn man nicht weiß, ob a^2 von dem Quadrate von $+a$, oder von dem von $-a$ herkomme; hier ist dies aber nicht mehr der Fall, das Produkt ist $-a$ und keineswegs $+a$.

Hieraus folgern wir, daß $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = -a$.

Ebenso ist $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b}$ mit $\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} \times \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}$, oder $-\sqrt{ab}$ gleichgeltend.

Die erste, zweite, dritte, vierte... Potenz von $\sqrt{-a}$ wird hiernach bezüglich sein, $\sqrt{-a}$, $-a$, $-a\sqrt{-a}$, $+a^2$, $+a^2\sqrt{-a}$, $-a^3$ u. s. w. Die von $-\sqrt{-a}$ sind respective $-\sqrt{-a}$, $-a$, $+a\sqrt{-a}$, a^2, $-a^2\sqrt{-a}$....

Das Quadrat von $1+\sqrt{-1}$ reducirt sich auf $2\sqrt{-1}$. Der Cubus von $-1+\sqrt{-3}$ ist 8; $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} = \frac{\sqrt{a}\,.\sqrt{-1}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$. Das Produkt $(x+a+b\sqrt{-1}) \times (x+a-b\sqrt{-1})$ ist $= (x+a)^2+b^2$.

Anmerkung. Diese Beispiele zeigen, daß sowohl das Produkt als der Quotient aus zwei imaginären Ausdrücken eine reelle Größe werden könne, aber nicht müsse.

§. 39. Aus der im §. 37 gegebenen Regel folgt, daß um ein mit einem Wurzelzeichen behaftetes Monom zu irgend einer Potenz zu erheben, man jeden Factor unter dem Wurzelzeichen auf diese Potenz erheben muß. Der Cubus von $\sqrt{3a^2b}$ ist $\sqrt{27a^6b^3}$; der von $\sqrt{2}$ ist $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Man sieht hieraus, daß die Wurzelausziehung aus dem mit schon einem Wurzelzeichen behafteten Monom im Allgemeinen geschieht, wenn man den Grad des Wurzelzeichens mit dem Grade der Wurzel, die man ausziehen will, multiplicirt, oder, wenn es angeht, solche aus der Wurzelgröße zieht. Man findet hiernach $\sqrt[3]{(\sqrt[3]{a^5})} = \sqrt[9]{a^5}$; $\sqrt[p]{(\sqrt[m]{a^n})} = \sqrt[mp]{a^n}$; $\sqrt{(\sqrt[3]{a^2b^4})} = \sqrt[3]{ab^2}$; $\sqrt[4]{(\sqrt[5]{a^4b^8})} = \sqrt[5]{ab^2}$.

§. 40. Man kann also, ohne den Werth einer Wurzelgröße zu ändern, die Exponenten und den Grad der Wurzel mit einer und derselben Zahl multipliciren oder dividiren; denn einerseits wird dadurch die Größe auf eine Potenz erhoben, anderseits aus dem Resultate die Wurzel von gleichem Grade mit der gebildeten Potenz gezogen, was die Größe wieder auf ihren ersten Zustand zurückbringt.

$$\sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^2};\ \sqrt{a^3} = \sqrt[6]{a^9};\ \sqrt{(3a^2b^3)} = \sqrt[4]{(9a^4b^6)};\ \sqrt[4]{a^3} = \sqrt[28]{a^{21}}.$$

Mittelst dieser Operation ist es leicht ungleichnamige Wurzelgrößen mit einander zu multipliciren oder zu dividiren. Man braucht sie deshalb nur auf einerlei Grad zu bringen, was dadurch geschieht, daß man die Exponenten und zugleich den Wurzelgrad mit einer und derselben gehörig gewählten Zahl multiplicirt, geradeso wie man bei der Reduction der Brüche auf einerlei Nenner verfährt. Vermittelst dieser Regel hat man:

$$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt[6]{a^3}\times\sqrt[6]{b^2}=\sqrt[6]{a^3b^2};\ \sqrt[m]{a^p}\cdot\sqrt[n]{b^q}=\sqrt[mn]{a^{pn}b^{qm}};$$

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[mn]{\frac{a^n}{b^m}};\ \frac{a}{b}\sqrt{\frac{s}{t}}:\frac{c}{d}\sqrt{\frac{y}{z}}=\frac{ad}{bc}\sqrt[mn]{\frac{s^n z^m}{t^n y^m}}.$$

Anmerkung. Der Satz, daß eine Wurzelgröße nicht geändert wird, wenn man den Wurzelgrad und den Potenzexponenten mit einer und derselben Zahl dividirt, bietet ein Mittel dar, Radicalgrößen in ihrer einfachsten Gestalt darzustellen. Beispiele:

$$\sqrt[25]{a^{20}b^{15}}=\sqrt[5]{a^4b^3};\ 2\sqrt[4]{a^6b^4}=2ba\sqrt{a}.$$

$$\sqrt[12]{a^6b^{18}}=b\sqrt{ab};\ \frac{2a^2b^2c^2}{4\sqrt[3]{a^3b^6dc^5}}=\frac{a}{2}\sqrt[3]{\frac{c}{d}}.$$

Negative und gebrochene Exponenten.

§. 41. Wir haben dargethan, daß, unter Voraussetzung $m>n$, a^{m-n} der Quotient von $\frac{a^m}{a^n}$ ist. Wenn aber der Exponent n den Exponenten m übertrifft, so wird $m-n$ eine negative Zahl $-p$ sein. Da man nun nicht weiß, welcher Begriff mit dem Ausdrucke a^{-p} zu verbinden ist, so wird man eigentlich a^{-p} mit a^n nicht multipliciren können; es ist also vor der Hand nicht erlaubt zu sagen, daß a^n mit a^{m-n} multiplicirt a^m hervorbringen soll. Wir bemerken aber, daß der Ausdruck a^{-p} an und für sich keinen Sinn hat, da er den Wortbegriffen Exponent und Potenz keineswegs entspricht. Es steht uns also frei, die Ausdrücke $\frac{1}{a^p}$ und a^p als gleichbedeutende Dinge anzusehen, was wir in der Folge immer thun wollen. Nach dieser Uebereinkunft können wir in allen Fällen sagen, daß $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$; denn für den Fall, wo $m>n$, ist die Sache erwiesen, und aus unserer Annahme ergibt sie sich für den Fall, wo $m<n$, weil durch Division der beiden Glieder mit a^m man erhält:

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{1}{a^{n-m}}=a^{-(n-m)}=a^{-p}.$$

Die Algebra lehrt Formeln finden, die wegen ihrer Allgemeinheit auf alle numerische, den Buchstaben beizulegende Werthe passen.

Wenn man daher nicht nöthig hat, in einem algebraischen Ausdrucke, wo Größen von der Form $\frac{a^m}{a^n}$ vorkommen, die verschiedenen, möglicherweise aus den Annahmen von $m >$ oder $< n$ hervorgehenden Fälle von einander zu unterscheiden: so kann solches nur als ein großer Vorzug betrachtet werden; man setzt a^{m-n} anstatt $\frac{a^m}{a^n}$, und die Formel wird für alle Hypothesen ihre Gültigkeit haben (wie im §. 17).

Auch auf den Fall, wo $m = n$, ist Rücksicht zu nehmen; a^{m-n} wird alsdann a^0, ein Symbol, das an und für sich ebenso wenig Bedeutung wie a^{-p} hat. Wir werden demnach übereinkommen $a^0 = 1$ zu setzen, weil dann $\frac{a^m}{a^n} = 1$. Der Ausdruck a^0 ist ein der Einheit gleichgeltendes Symbol.

Stoßen wir folglich in einer Formel auf die Ausdrücke a^0 und und a^{-p}, so werden solche leicht zu erklären sein, wenn wir auf ihre Entstehung zurückgehen und bedenken, daß a^0 und a^{-p} nur von einer Division, bei der $m = n$ im ersten und $n = m + p$ im zweiten Falle war, herrühren konnten. Nach dieser Uebereinkunft kann man einen Factor des Nenners in den Zähler setzen, wenn man seinem Exponenten das negative Zeichen gibt. Hiernach

$$a^0 = b^0 = (p + q)^0 = \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1;$$

$$(bc)^{-p} = \frac{1}{(bc)^p}; \quad \frac{1}{a} = a^{-1}; \quad \frac{c}{f} = cf^{-1} = \frac{f^{-1}}{c^{-1}};$$

$$\frac{a^m b^n}{c^p d^q} = a^m b^n c^{-p} d^{-q}; \quad \frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} = (a^3 + b^3)(a^2 + b^2)^{-1}.$$

Wir haben also Potenzen, deren Exponenten Null und negative Größen sind, in die Rechnung eingeführt; die Principien, auf denen diese Einführung beruht, bieten weiter keine Schwierigkeit dar. Wir kommen jetzt zu den Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

§. 42. Die für die Wurzelausziehung aus Monomen gegebene Regel zeigt, daß $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$; n muß aber dann ein Vielfaches von m sein, widrigenfalls man auf einen Bruchexponenten kommen würde. Da man die Natur eines solchen noch nicht kennt, so kann man auch

nicht sagen, daß $a^{\frac{n}{m}}$ m mal als Factor genommen, das Produkt a^n gäbe. Wir finden uns also hier in demselben Falle, wie bei den negativen Exponenten, können mithin das Zeichen $a^{\frac{n}{m}}$, das für sich keinen bestimmten Sinn darstellt, als Bild eines klaren Ausdrucks $\sqrt[m]{a^n}$ gebrauchen. Hierdurch sind die Formeln auf alle Fälle angepaßt, n mag ein Vielfaches von m sein oder nicht, was ganz in dem Wesen der Algebra liegt.

Kommen wir also in einer Formel auf den Ausdruck $a^{\frac{n}{m}}$, so ist es leicht davon einen klaren Begriff zu erhalten, wenn man bemerkt, daß ein solcher Ausdruck nur dadurch entstanden ist, insofern die $m$te Wurzel aus a^n verlangt wurde. Die für die Wurzelausziehung gegebene Regel ist folglich in allen Fällen gültig. Also

$$\sqrt{3a} = (3a)^{\frac{1}{2}}; \ \sqrt{x^2 - y^2} = (x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}; \ b^{\frac{3}{2}} = \sqrt{b^3};$$

$$b^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{b}; \ c^{\frac{1}{5}}p^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{cp}; \ \sqrt[r]{\frac{a^m b^n}{c^p}} = \frac{a^{\frac{m}{r}} b^{\frac{n}{r}}}{c^{\frac{p}{r}}}; \ \sqrt[m]{\frac{b^r}{c^n}} = b^{\frac{r}{m}} \times c^{-\frac{n}{m}}.$$

§. 43. a^0, a^{-p}, $a^{\frac{m}{n}}$ sind also der Uebereinkunft gemäß nichts anderes, als Bilder der Werthe 1, $\frac{1}{a^p}$ und $\sqrt[n]{a^m}$. Jedoch sind die Größen o, $-p$ und $\frac{n}{m}$ als keine wirkliche Exponenten in dem diesem Worte entsprechenden Begriffe zu betrachten, obschon sie die den Exponenten zukommende Stelle einnehmen. Wir sind also ohne weitere Gründe nicht berechtigt $a^m \times a^n = a^{m+n}$ zu setzen, wenn m und n nicht beide ganze und positive Zahlen darstellen. Dasselbe gilt von der Division, Potenzirung und Wurzelausziehung. Wir müssen folglich beweisen, daß diese Symbole den nämlichen Regeln, wie die wahren ganzen und positiven Exponenten unterworfen sind, oder daß, was auch m und n sein mögen,

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \ (a^m)^p = a^{mp}, \ \sqrt[p]{a^m} = a^{\frac{m}{p}}.$$

1. Wenn die Exponenten negativ sind: so hat man (m, n und p positiv angenommen)

1) $a^m \times a^{-n} = a^m \times \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. Ebenso findet man, daß $a^{-m} \times a^{-n} = a^{-m-n}$.

2) $\frac{a^m}{a^{-n}} = a^m : \frac{1}{a^n} = a^m \times a^n = a^{m+n}$. Ebenso findet man, daß $\frac{a^{-m}}{a^n} = a^{-m-n}$ und $\frac{a^{-m}}{a^{-n}} = a^{n-m}$.

3) $(a^{-n})^p = \left(\frac{1}{a^n}\right)^p = \frac{1}{a^{np}} = a^{-np}$.

4) $\sqrt[m]{a^{-n}} = \sqrt[m]{\frac{1}{a^n}} = \frac{1}{a^{\frac{n}{m}}} = a^{-\frac{n}{m}}$.

II. Wenn die Exponenten Brüche sind, so kann man die beiden Glieder derselben mit einer und derselben Zahl multipliciren; denn (§. 40) $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}} = a^{\frac{np}{mp}}$. Man kann also die Bruch-Exponenten der Größen, welche mit einander multiplicirt oder dividirt werden sollen, auf einerlei Nenner bringen.

1) $a^{\frac{n}{m}} \times a^{\frac{p}{m}} = \sqrt[m]{a^n} \times \sqrt[m]{a^p} = \sqrt[m]{a^{n+p}} = a^{\frac{n+p}{m}}$.

2) $a^{\frac{n}{m}} : a^{\frac{p}{m}} = \sqrt[m]{a^n} : \sqrt[m]{a^p} = \sqrt[m]{a^{n-p}} = a^{\frac{n-p}{m}}$.

3) $\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^p = (\sqrt[m]{a^n})^p = \sqrt[m]{a^{np}} = a^{\frac{np}{m}}$.

4) $\sqrt[p]{a^{\frac{n}{m}}} = \sqrt[p]{(\sqrt[m]{a^n})} = \sqrt[mp]{a^n} = a^{\frac{n}{mp}}$.

Ausserdem bemerken wir, daß diese auf Bruchexponenten Bezug habenden Rechnungen auch gestatten, solche negativ anzunehmen.

III. Betrachten wir jetzt den Fall, wo die Exponenten irrational sind. Es sei z. B. $a^{\sqrt{2}} \times a^{\sqrt{3}}$; bezeichnen wir durch z und z' die Näherungswerthe dieser Exponenten, so daß $z = \sqrt{2} + h$, $z' = \sqrt{3} + h'$, wo h und h' die Fehler sind, welche durch hinlänglich fortgesetzte Annäherung auf jeden beliebigen Grad von Kleinheit gebracht werden können. Begnügt man sich nun mit den Annäherungswerthen z und z', so ist das Produkt auch nur annähernd richtig. Stellt α den dadurch entstandenen Fehler, der so klein, als man nur will, gemacht werden kann, dar, so hat man genau $a^{\sqrt{2}} \times a^{\sqrt{3}} +$

$\alpha = a^{z + z'} = a^{\sqrt{2} + \sqrt{3} + h + h'} = a^{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \times a^{h + h'}$; je kleiner aber h und h' sind, desto mehr nähert sich $a^{h + h'}$ dem 1; man kann also dem zweiten Gliede der obigen Gleichung die Form $a^{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \beta$ geben, wo β mit α, h und h' fortwährend abnimmt. Werden die constanten Glieder einander gleichgesetzt (§. 22), so erhält man $a^{\sqrt{2}} \times a^{\sqrt{3}} = a^{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$. Aehnlicherweise zeigt man, daß die irrationalen Exponenten bei der Division und der Wurzelausziehung denselben Regeln, wie die ganzen unterworfen sind; übrigens ergibt sich dies schon aus dem eben Erwiesenen.

IV. Was die imaginären Exponenten anlangt, so finden der Definition zufolge (§. 38) die für die reellen Größen gegebenen Regeln auch bei den imaginären Ausdrücken ihre Anwendung, insofern man solche Symbole der Rechnung unterwerfen will, obschon sie nicht wirklich, sondern blos in der Einbildung existiren; eine eigentliche Beweisführung hat folglich hier nicht statt.

Vermittelst dieser Regeln werden die Rechnungen öfters vereinfacht. Will man z. B. $\sqrt[5]{a^3b^4}$ mit $\sqrt[7]{a^2b^3}$ dividiren, so schreibt man $a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{4}{5}} : a^{\frac{2}{7}}b^{\frac{3}{7}}$, reducirt die Exponenten auf einerlei Nenner, wodurch man erhält: $a^{\frac{21}{35}}b^{\frac{28}{35}} : a^{\frac{10}{35}}b^{\frac{15}{35}} = a^{\frac{11}{35}}b^{\frac{13}{35}} = \sqrt[35]{a^{11}b^{13}}$. Eben so hat man $\sqrt[4]{a^3} \times \sqrt[8]{a^2} = a^{\frac{3}{4} + \frac{2}{8}} = a^{\frac{8}{8}} = a$.

Anmerkung. Durch den Gebrauch der Bruchexponenten wird also die Wurzelausziehung auf eine bloße Potenzrechnung reducirt. Descartes war der erste, welcher diese glücklich gewählte Bezeichnung einführte.

Auf die Polynome, welche negative oder gebrochene Exponenten enthalten, finden jetzt die gewöhnlichen Regeln ihre Anwendung; es ist gut in dergleichen Operationen sich einige Uebung zu erwerben. Nachstehende zwei Divisions-Beispiele zeigen den Gang, den man hier zu befolgen hat:

$$\begin{array}{l|l}
5a^{\frac{25}{12}} - 41a^{\frac{13}{12}}b + 42a^{\frac{1}{12}}b^2 & a^{\frac{1}{3}} - 7ba^{-\frac{2}{3}} \\ \cline{2-2}
-5a^{\frac{25}{12}} + 35a^{\frac{13}{12}}b & 5a^{\frac{7}{4}} - 6a^{\frac{3}{4}}b \\ \cline{1-1}
\text{Erster Rest....} -6a^{\frac{13}{12}}b + 42a^{\frac{1}{12}}b^2 & \\
\qquad +6a^{\frac{13}{12}}b - 42a^{\frac{1}{12}}b^2 & \\ \cline{1-1}
\text{Zweiter Rest....} \qquad 0 &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{l|l}
6a^4-23a^2\sqrt{-1}-13ab-20+22a^{-1}b\sqrt{-1}+6a^{-2}b^2 & 2a^2-5\sqrt{-1}-3a^{-1}b \\
\underline{-6a^4+15a^2\sqrt{-1}+9ab} & \overline{3a^2-4\sqrt{-1}-2a^{-1}b} \\
\text{1r Rest}\ -8a^2\sqrt{-1}-4ab-20+22a^{-1}b\sqrt{-1}+6a^{-2}b^2 & \\
\underline{\quad +8a^2\sqrt{-1}\qquad +20-12a^{-1}b\sqrt{-1}} & \\
\text{2r Rest}\qquad -4ab+10a^{-1}b\sqrt{-1}+6a^{-2}b^2 & \\
\underline{\qquad\qquad 4ab-10a^{-1}b\sqrt{-1}-6a^{-2}b^2} & \\
\text{3r Rest}\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Wir bemerken noch, daß der Quotient negative Exponenten für a zulassen und dennoch sich endigen könne. Geht aber die Division auf, so ist klar, daß die Summe der geringsten Exponenten von a in dem Quotienten und Divisor den geringsten dieses Buchstaben im Dividend hervorbringe. Zieht man hiernach die kleinsten Exponenten von a in den beiden erstern Polynomen von einander ab, so hat man den kleinsten Exponenten von a in dem gesuchten Quotienten, wenn die Division aufgeht. Man ist also überzeugt, einen solchen Fall nicht vor sich zu haben, sobald im Quotienten ein Glied gefunden wird, in dem der Exponent geringer als die eben erwähnte Differenz ist.

Von den Quadrat- und Cubik-Wurzeln der Polynome.

§. 44. 1) Kein Binom ist ein Quadrat, weil jedes Monom zum Quadrat erhoben, ein Monom gibt, und das Quadrat eines Binoms ein Trinom ist. Man würde also einen groben Fehler begehen, wenn man $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$ setzte.

2) Es seien a und $a+1$ zwei auf einander folgende ganze Zahlen; ihre Quadrate a^2 und a^2+2a+1 sind um $2a+1$ von einander verschieden, was mit dem im §. 66 der Arithmetik Gesagten übereinstimmt.

Da $2a+1$ alle ungeraden Zahlen darstellen kann, so sieht man, daß jede ungerade Zahl die Differenz der Quadrate ihrer zwei ungleichen und ganzen Hälften ist: $77=39^2-38^2$, $37=19^2-18^2$ ꝛc. Wir werden übrigens bei der Behandlung der unbestimmten Gleichungen des zweiten Grades (siehe höhere Algebra) zeigen, daß es mehrere Arten gibt, eine solche Zerlegung zu bewerkstelligen, sobald eine ungerade Zahl keine Primzahl ist: $27=14^2-13^2=6^2-3^2$; $105=53^2-52^2=19^2-16^2=13^2-8^2=11^2-4^2$.

3) Ist k^2 das größte in N enthaltene Quadrat, so sind k und $k + 1$ bis auf 1 nahe genaue Werthe von $\sqrt{N}$. Man hat $(k+\frac{1}{2})^2 = k^2 + k + \frac{1}{4}$, und $N = k^2 + r$, wenn r den ganzzahligen Rest, welchen k gibt, bezeichnet. Werden diese Gleichungen von einander abgezogen, so erhält man $N - (k + \frac{1}{2})^2 = r - k - \frac{1}{4}$; ist nun $r > k$, so hat man $\sqrt{N} > k + \frac{1}{2}$, und $k + 1$ liegt dem Werthe von $\sqrt{N}$ näher als k; das Gegentheil findet statt, wenn $r < k$. Je nachdem also der Rest $r >$ oder $<$ als die ganzzahlige Wurzel k ist, nimmt man $k + 1$ oder k als erste Annäherung der Quadratwurzel von N.

4) Hat man die Rechnung des Wurzelausziehens so weit getrieben, daß man mehr als die Hälfte der Ziffern, welche man für die Wurzel erhalten will, kennt, so kann man die übrigen durch eine bloße Division finden, was die Annäherungsoperation bedeutend abkürzt.

Um die Richtigkeit dieses Verfahrens einzusehen, sei N die vorgelegte Zahl, deren Wurzel $a + x$ gesucht wird, a bezeichnet den nach der gewöhnlichen Methode gefundenen und x den noch fehlenden Theil, so daß $\sqrt{N} = a + x$. Es ist hierbei zu erinnern, daß um den Ziffern von a ihren gehörigen Werth zu verschaffen, man ihm zur Rechten n Nullen anhängen muß, d. h. so viel als x Ziffern hat, oder so viel, als in N noch Klassen neben die successiven Reste herunterzusetzen übrig bleiben. Unserer Bezeichnung zufolge haben wir $N = a^2 + 2a\,x + x^2$, woraus folgt: $\frac{N - a^2}{2a} = x + \frac{x^2}{2a} = \frac{R}{2a}$, wo R den Rest $N - a^2$ darstellt, neben welchen sämmtliche noch nicht angewendeten Klassen mit je zwei Ziffern gesetzt sind. Da nun x aus n Ziffern besteht, so wird x^2 im höchsten Falle deren $2n$ haben, während laut der Annahme a wenigstens deren $n + 1$ hat, auf welche n Nullen folgen. Dies gibt uns zu erkennen, daß $a > x^2$, folglich $\frac{x^2}{2a} < \frac{1}{2}$ ist. Man hat demnach $x = \frac{N - a^2}{2a}$, sobald nur der Theil in ganzen Zahlen von $\sqrt{N}$ verlangt wird, was immer statt findet, weil bei den Annäherungen selbst für die Wurzeln der Brüche immer eine solche Umformung mit den Zahlen vor sich geht, wodurch eine Wurzelausziehung mit nur ganzen Theilen vorzunehmen ist. (Arithm. §. 66).

Man dividire daher $N-a^2$ oder den Rest der Operation, vermittelst der man a gefunden hat, durch das Doppelte der Wurzel a; betrachte deshalb den bekannten Theil a der gesuchten Wurzel als einfache Einheiten (indem man die ihm zur Rechten anhängenden n Nullen unterdrückt), und lasse gleichfalls n Ziffern auf der Rechten von N weg.

Für $\sqrt{337679817}$ geben die drei ersten Klassen vorerst 183 als Wurzel, und 278 als Rest; dividirt man also 27898 durch zweimal 183 oder 366, so erhält man 76 für die beiden übrigen Ziffern der Wurzel, welche 18376 ist.

Ebenso erhält man $\sqrt{2} = 1{,}4142$, wenn man die Annäherung bis $\frac{1}{10000}$ treibt; um die vier folgenden Decimalziffern zu finden, dividirt man 38360000 durch 2×14142 oder 28284; der Quotient ist 1356, ꝛc. Man findet sonach $\sqrt{2} = 1{,}4142135623732$, $\sqrt{3} = 1{,}7320508076$.

Anmerkung. Die Gleichung $\frac{N-a^2}{2a} = x + \frac{x^2}{2a}$ gibt, wenn a die Wurzel des größten in N enthaltenen Quadrats ist, also x nothwendigerweise einen Bruch darstellt, mithin $\frac{x^2}{2a}$ kleiner als x sein muß, auch zu nachstehender Methode, sich der Quadratwurzel einer Zahl nämlich durch gewöhnliche Brüche zu nähern, Anlaß. Man verlangt die Quadratwurzel aus 2. Da 1 das größte in 2 enthaltene Quadrat ist, so bleibt, wenn man es davon abzieht, 1 übrig. Der Rest durch das Doppelte der Wurzel a dividirt, gibt $\frac{1}{2}$ als Näherungswerth für x, mithin für erste Annäherung der Wurzel $\frac{3}{2}$. Man erhebt diese Zahl aufs Quadrat und zieht solches von 2 ab, man erhält den Rest $-\frac{1}{4}$. Die Formel $\frac{N-a^2}{2a} = x + \frac{x^2}{2a}$ wird hiernach $-\frac{1}{12} = x + \frac{x^2}{2a}$, da $a = \frac{3}{2}$. Setzt man $-\frac{1}{12}$ für x, so finden wir als zweite Annäherung der Wurzel $\frac{3}{12} - \frac{1}{12} = \frac{17}{12}$.

Diese Operation setzt man so weit fort, als man für nöthig erachtet.

5) Die Differenz der Cuben der auf einander folgenden ganzen Zahlen a und $a+1$ ist $3a^2+3a+1$, woraus folgt, daß so lange der Rest bei der Cubikwurzelausziehung kleiner ist, als das dreifache

Quadrat der Wurzel nebst den dreifachen der Wurzel plus der Einheit, die gesuchte Wurzel nicht zu klein genommen sei, was dem im §. 68 der Arithmetik Gesagten conform ist.

6) Hat man von der Cubikwurzel einer ganzen Zahl schon mehr Ziffern gefunden, als deren noch verlangt werden, so kann man die übrigen durch bloße Division hinlänglich genau finden. Denn bezeichnet hier a, x und N das Nämliche wie in 4, so hat man $\frac{N-a}{3a^2} = x + \frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^2}$. Da $\frac{x^2}{a} < 1$ und $\frac{x^3}{3a^2} < 1$, weil $a > 10^{2n}$ und $x < 10^n$, so ist der Fehler, wenn man $\frac{N-a^3}{3a^2} = x$ setzt, weniger als zwei Einheiten in den letzten Ziffern von α.

§. 45. Man soll die Quadratwurzel aus

$$9a^4 - 12a^3b + 34a^2b^2 - 20ab^3 + 25b^4$$

ziehen; wir stellen dieses Polynom durch X dar und nennen, der Kürze halber, dasjenige Glied, wo der Buchstabe den höchsten Exponenten enthält, das größte Glied. Es sei x das größte Glied der gesuchten Wurzel, y die Summe der übrigen Glieder derselben. Hieraus folgt $X = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ (§. 6); x^2 ist sichtbar das größte Glied des Quadrats X, also $x^2 = 9a^4$, oder $x = 3a^2$ als erstes Glied der Wurzel, und $X = 9a^4 + 6a^2y + y^2$. Zieht man $9a^4$ auf beiden Seiten ab, so kommt

$$-12a^3b + 34a^2b^2 - 20ab^3 + 25b^4 = 6a^2y + y^2,$$

y ist im Allgemeinen eben so gut wie $6a^2y$ ein Polynom; da nun y nur Glieder, in denen der Exponent von a geringer als 2 ist, enthalten kann, so ist klar, daß das größte Glied in $(6a^2 + y)\,y$ das Produkt aus $6a^2$ mit dem größten Gliede von y ausmacht; dieses letztere wird demnach der Quotient von $-12a^3b$ dividirt durch $6a^2$, das Doppelte der schon gefundenen Wurzel, sein. Hiernach ist $-2ab$ das zweite Wurzelglied.

Um die Rechnung zu beendigen, setzen wir $3a^2 - 2ab$, oder $x - 2ab = x'$, und stellen durch y' die übrigen Theile der gesuchten Wurzel dar. Wir haben sonach $X = x'^2 + 2x'y' + y'^2$, wo wir x'^2 auf beiden Seiten abziehen; x'^2 besteht aber aus x^2, was schon hinweggenommen ist, dann aus $-2x \times 2ab + (2ab)^2$, oder $-2ab(2x - 2ab)$. Wir schreiben folglich das zweite Wurzelglied $-2ab$

neben $6a^2$, das Doppelte des ersten Wurzelgliedes, multipliciren das Ganze mit $-2ab$ und ziehen das Resultat von dem obigen Reste ab. Auf diese Art haben wir

$$30a^2b^2 - 20ab^2 + 25b^4 = 2x'y' + y'^2.$$

Ist y' ein Polynom, so sieht man bald, daß das größte Glied $30a^2b^2$ das von $2x'y'$ ist, d. h. das Produkt des größten Gliedes von $2x'$ mit dem von y'. Wir dividiren also $30a^2b^2$ durch $6a^2$, der Quotient $5b^2$ wird das dritte Wurzelglied sein.

Wir setzen jetzt $3a^2 - 2ab + 5b^2$, oder $x' + 5b^2 = x''$, und bezeichnen die Summe der übrigen Glieder der Wurzel durch y''; wir haben alsdann $X - x''^2 = 2x''y'' + y''^2$. Um x''^2 abzuziehen, bemerken wir, daß, da schon x'^2 abgezogen wurde, vom letzten Reste $30a^2b^2 - 20ab^2 + 25b^4$ nur noch $2x' \cdot 5b^2 + (5b^2)^2$, oder $5b^2(2x' + 5b^2)$ abzuziehen bleibt. Wir schreiben daher $5b^2$ neben das doppelte Produkt $6a^2 - 4ab$ der beiden ersten gefundenen Wurzelglieder und multipliciren das Ganze mit dem dritten Gliede $5b^2$, und ziehen das Produkt vom zweiten Reste ab. Da man keinen Rest findet, so ist $X - x''^2 = 0$, woraus $y'' = 0$ und $x'' = \sqrt{X}$. Die verlangte Wurzel ist daher $3a^2 - 2ab + 5b^2$.

Nach diesen Betrachtungen wird nun die Operation folgendermaßen angeordnet:

	$9a^4 - 12a^3b + 34a^2b^2 - 20ab^3 + 25b^4$	$3a^2 - 2ab + 5b^2$
	$-9a^4$	
1r Rest	$-12a^3b + 34a^2b^2 - 20ab^3 + 25b^4$	$(6a^2 - 2ab) \times -2ab$
	$+12a^3b - 4a^2b^2$	
2r Rest	$30a^2b^2 - 20ab^3 + 25b^4$	$6a^2 - 4ab + 5b^2$
3r Rest	0	$\times 5b^2$

Man ordnet also das Polynom, zieht die Quadratwurzel aus dem ersten Gliede, und setzt die Operation, wie bei dem numerischen Wurzelausziehen, weiter fort.

Nachstehende Beispiele zeigen, daß dasselbe Verfahren bei der Wurzelausziehung von Größen, in denen negative oder gebrochene Exponenten, selbst imaginäre Ausdrücke, vorkommen, seine Anwendung findet.

I.

	$9a^4-12a^3\sqrt{-1}-2a^2(2-3\sqrt{-2})+4a\sqrt{2}-2$	$3a^2-2a\sqrt{-1}+\sqrt{-2}$
	$-9a^4$	
1r Rest	$-12a^3\sqrt{-1}-2a^2(2-3\sqrt{-2})+4a\sqrt{2}-2$	$(6a^2-2a\sqrt{-1})\times-2a\sqrt{-1}$
	$+12a^3\sqrt{-1}+4a^2$	
2r Rest	$6a^2\sqrt{-2}+4a\sqrt{2}-2$	$6a^2-4a\sqrt{-1}+\sqrt{-2}$
3r Rest	0	$\times+\sqrt{2}$

II.

	$4a^2-12ab^{\frac{1}{2}}+9b+12-18a^{-1}b^{\frac{1}{2}}+9a^{-2}$	$2a-3b^{\frac{1}{2}}+3a^{-1}$
	$-4a^2$	
1r Rest	$-12ab^{\frac{1}{2}}+9b+12-18a^{-1}b^{\frac{1}{2}}+9a^{-2}$	$(4a-3b^{\frac{1}{2}})\times-3b^{\frac{1}{2}}$
	$+12ab^{\frac{1}{2}}-9b$	$4a-6b^{\frac{1}{2}}+3a^{-1}$
2r Rest	$12-18a^{-1}b^{\frac{1}{2}}+9a^{-2}$	$\times+3a^{-1}$
3r Rest	0	

III.

	x^2-a^2	$x^2-\frac{1}{2}a^2x^{-1}-\frac{1}{8}a^4x^{-3}-\ldots$
	$-x^2$	
1r Rest	$-a^2$	$(2x-\frac{1}{2}a^2x^{-1})\times-\frac{1}{2}a^2x^{-1}$
	$+a^2-\frac{1}{4}a^4x^{-2}$	$2x-a^2x^{-1}-\frac{1}{8}a^4x^{-3}$
2r Rest	$-\frac{1}{4}a^4x^{-2}$	$\times-\frac{1}{8}a^4x^{-3}$
	$+\frac{1}{4}a^4x^{-2}-\frac{1}{8}a^6x^{-4}-\frac{1}{64}a^8x^{-6}$	
3r Rest	$-\frac{1}{8}a^6x^{-4}$ ꝛc.	

Dies Beispiel zeigt, wie man sich zu verhalten hat, wenn die Wurzel sich nicht genau ausziehen läßt, was man daran erkennt, wenn man ein Wurzelglied findet, wo a einen niedrigern Exponenten als die Hälfte des kleinsten Exponenten im Quadrate hat. Man hat hier

$$\sqrt{x^2-a^2} = x - \frac{a^2}{2x} - \frac{a^4}{ax^3} - \text{ꝛc.}$$

IV. Ebenso erhält man $\sqrt{a^2+x} = a + \frac{x}{2a} - \frac{x^2}{8a^3} + \frac{x^4}{16a^5} - $ ꝛc.

Anmerkung. Die beiden letzten Formeln können zur annähernden Ausziehung der Quadratwurzel aus einer gegebenen Zahl angewendet werden, man braucht deshalb nur diese Zahl in zwei Theile zu zerlegen, so daß der eine ein vollkommenes Qua-

drat ist; diesen würde man für a^2 nehmen, und der andere würde x sein. Es sei z. B. die Zahl 150; man würde sie in $144 + 6$ zerlegen, weil $144 = 12^2$. Hiernach $a^2 = 144$ und $x = 6$. Hieraus ergibt sich mittelst der Formel IV $\sqrt{150} = 12 + \frac{1}{4} - \frac{1}{384} +$ rc. $= 12{,}2474$ bis auf die vierte Decimalstelle genau.

§. 46. Der Cubus von $x + y$ ist $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ (§. 6); es wird jetzt nicht schwer sein, hiernach die vorhergehenden Prinzipien auf die Bestimmung der Cubikwurzel aus einem Polynom in Anwendung zu bringen. Folgende zwei Beispiele werden ausreichen, um zu zeigen, wie man zu verfahren hat:

I.

	$8a^6 - 36a^4b^2 + 54a^2b^4 - 27b^6$	$2a^2 - 3b^2$ Wurzel.
	$-8a^6$	$12a^4 - 18a^2b^2 + 9b^4$
1r Rest	$-36a^4b^2 + 54a^2b^4 - 27b^6$	$\times -3b^2$
2r Rest	0	

Zu diesem Zweck ordne man das Polynom, suche die dritte Wurzel vom ersten Gliede $8a^6$, solche ist $2a^2$; ziehe dann $8a^6$ vom vorgelegten Polynom ab. Das erste Glied $-36a^4b^2$ des erlangten Restes dividire durch $12a^4$, das Dreifache des Quadrats von $2a^2$; der Quotient $-3b^2$ ist das zweite Wurzelglied. Neben $12a^4$ setze $-18a^2b^2 + 9b^4$, oder das Dreifache des Produktes aus $-3b^2$ mit dem ersten Wurzelgliede $2a^2$, und das Quadrat von $-3b^2$; dieses Trinom wird mit $-3b^2$ multiplicirt, und das Resultat vom ersten Reste abgezogen. Da der Rest Null wird, so ist $2a^2 - 3b^2$ die genaue Cubikwurzel des vorgelegten Polynoms. Hätte man einen zweiten Rest erhalten, so würde man mit demselben wie oben verfahren.

II.

	$a^3 + x$	$a + \frac{x}{3a^2} - \frac{x^2}{9a^5} + \frac{5x^3}{81a^8} -$ rc.
	$-a^3$	
1r Rest	x	
	$x + \frac{x^2}{3a^3} + \frac{x^3}{27a^6}$	
2r Rest	$-\frac{x^2}{3a^3} - \frac{x^3}{27a^6}$ rc.	

Anmerkung. Um diese Formel zur annähernden Ausziehung der dritten Wurzel aus einer gegebenen Zahl anzuwenden, würde man diese wie in IV des vorigen Paragraphs in zwei Theile theilen, so daß der eine ein vollkommener Cubus ist. Für die Cubikwurzel aus 2 gäbe die Formel die Reihe

$$\sqrt[3]{2} = 1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{9} + \tfrac{5}{81} \text{ ꝛc.}$$

Die Ausziehung der vierten, fünften und höhern Wurzeln wollen wir hier übergehen.

Von den Gleichungen des zweiten Grades.

§. 47. Wenn man alle Glieder auf eine Seite schafft, diejenigen Glieder, welche x^2 enthalten, in eins vereiniget, das Nämliche mit den Gliedern, worin x Factor ist, und mit den bekannten Gliedern vornimmt; so wird die Gleichung vom zweiten Grade die Form $Ax^2 + Bx + C = 0$ haben. Setzt man $\frac{B}{A} = p$ und $\frac{C}{A} = q$, so hat man $x^2 + px + q = 0 \ldots (1)$, eine Gleichung, welche alle Gleichungen vom zweiten Grade mit einer Unbekannten darstellen kann, wo p und q bekannte positive oder negative Größen bezeichnen.

Anmerkung. Sind nur Glieder mit x^2 und bekannte Glieder vorhanden, so heißt die Gleichung eine rein quadratische. Sie heißt aber eine unreine, gemischte, wenn ausser den Gliedern mit x^2 und den bekannten auch noch Glieder mit x in der Gleichung vorkommen.

Dividiren wir $x^2 + px + q$ durch $x - a$, wo a irgend eine Zahl vorstellt, so kommt $x + a + p$ als Quotient, und $a^2 + pa + q$ als Rest. Dieser Rest ist Null oder er ist es nicht, je nachdem a eine Wurzel oder keine Wurzel der vorgelegten Gleichung ist. (Weil man auch durch Wurzelausziehung die der Gleichung entsprechenden Werthe findet, so nennt man solche die Wurzeln der Gleichung.) Jede Größe, die Wurzel einer Gleichung vom zweiten Grad ist, gibt folglich einen Binomialfactor $(x - a)$ des ersten Theils dieser Gleichung, die hiernach die Form $(x-a)(x+a+p) = 0$ annimmt.

Nun ist es einleuchtend, daß ein Produkt gleich Null ist, wenn irgend einer seiner Factoren Null ist; man hat also $(x - a)$

$(x + a + p) = 0$, nicht allein wenn $x - a = 0$, was $x = a$ gibt, sondern auch noch, wann $x + a + p = 0$, was $x = -a - p$ gibt. Folglich läßt

1) Jede Gleichung vom zweiten Grade, die eine Wurzel a hat, auch noch eine zweite $= -(a + p)$ zu.

2) Eine solche Gleichung kann nur zwei Wurzeln haben; dieser Satz wird später erwiesen werden.

3) Die Summe der beiden Wurzeln $+a$ und $-(a + p)$ ist $-p$, und ihr Produkt ist $-(a^2 + ap) = q$, weil $a^2 + pa + q = 0$. Folglich ist der Coefficient von x gleich dem Entgegengesetzten der Summe der Wurzeln, und das dritte Glied gleich dem Produkte der Wurzeln. So ist $x = 5$ eine Wurzel der Gleichung $x^2 - 8x + 15 = 0$, wie man aus der Substitution ersieht. Das erste Glied der Gleichung findet man durch $x - 5$ theilbar; der Quotient ist $x - 3$; die beiden Wurzeln sind 3 und 5, deren Summe 8 und Produkt 15 beträgt.

Anmerkung. Die Werthe $x = a$ und $x = -(a + p)$ finden nicht gleichzeitig statt, sondern einer nach dem andern; x stellt eine unbekannte Größe dar, kann daher unter Umständen verschiedene Werthe bezeichnen. Und dies ist hier der Fall; die obigen Werthe genügen, obgleich sie verschieden sind, beide der Aufgabe. Will man z. B. eine Zahl finden, deren Quadrat um 15 vermehrt gleich dem Achtfachen der gesuchten Zahl sei, so hat man die vorige Gleichung $x^2 - 8x + 15 = 0$. Die zwei verschiedenen Zahlen 5 und 3 besitzen also die in der Aufgabe verlangte Eigenschaft.

4) Es ist leicht, eine Gleichung vom zweiten Grade, deren Wurzeln k und l gegeben sind, anzuschreiben; man setze ihre Summe $= k + l$ und ihr Produkt $= kl$, wodurch man erhält $x^2 - (k + l)x + kl = 0$. Man kann auch das Produkt $(x - k)(x - l)$ bilden. Sollen z. B. 5 und -7 die Wurzeln sein, so multiplicirt man $x - 5$ mit $x + 7$; oder man nimmt $5 - 7 = -2$, fünfmal $-7 = -35$, ändert das Zeichen der Summe, wodurch man $x^2 + 2x - 35 = 0$ als gesuchte Gleichung erhält.

5) Die Gleichung (1) auflösen, kommt also darauf zurück, zwei Zahlen zu suchen, deren Summe $-p$ und Produkt $+q$ sei.

6) Es kann sich ereignen, daß die Wurzeln k und l gleich sind;

alsdann sind die Factoren $x - k$ und $x - l$ gleich, und $x^2 + px + q$ ist das Quadrat von einem dieser Factoren.

§. 48. Um zur Auflösung der Gleichung (1) zu gelangen, bemerken wir, daß im Falle $x^2 + px + q$ ein Quadrat wäre, man durch Ausziehung der Quadratwurzel nur noch eine Gleichung vom ersten Grad haben würde. Vergleichen wir dieses Trinom mit $(x+n)^2$ oder $x^2 + 2xn + n^2$, wo n willkührlich ist, so werden die beiden ersten Glieder dieser Trinome gleich sein, wenn wir $n = \frac{1}{2}p$ setzen. Findet sich hernach n^2 oder $\frac{1}{4}p^2 = q$, so ist $x^2 + px + q$ das Quadrat von $x + \frac{1}{2}p$; das letzte Trinom ist nur dann ein vollständiges Quadrat, wenn $\frac{1}{4}p^2 = q$. Führt man anstatt p und q ihre Werthe $\frac{B}{A}$ und $\frac{C}{A}$ ein, so erhält man zwischen den Coefficienten die Relation $B^2 - 4AC = 0$, damit $Ax^2 + Bx + C$ ein vollkommenes Quadrat sei.

In dem Falle, daß $\frac{1}{4}p^2 = q$, geht die vorgelegte Gleichung in $(x + \frac{1}{2}p)^2 = 0$ über, und die beiden Wurzeln sind $-\frac{1}{2}p$. Findet diese Bedingung nicht statt, so kommt, wenn wir $\frac{1}{4}p^2 - q$ auf beiden Seiten der Gleichung hinzufügen, $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = (x + \frac{1}{2}p)^2 = \frac{1}{4}p^2 - q$; zieht man aus beiden Theilen die Wurzel, so ist $x + \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$, woraus $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$ . . . . (2)

Den Grund für das doppelte Zeichen $\pm$ haben wir in §. 35 angegeben. Der Werth von x ist also gleich dem Entgegengesetzten des halben Coefficienten des zweiten Gliedes plus oder minus der Quadratwurzel aus der Summe der auf die zweite Seite gebrachten bekannten Größe, und des Quadrats des genannten halben Coefficienten. Man wird demnach von jeder Gleichung zur Stelle die Wurzel finden können, ohne gerade nöthig zu haben, in ihr die vorigen Operationen von Neuem wieder zu verrichten.

Für $x^2 - 8x + 15 = 0$ findet man

$$x = 4 \pm \sqrt{(16 - 15)} = 4 \pm 1, \text{ d. h. } x = 5 \text{ und } = 3.$$

Ebenso gibt $x^2 + 2x = 35$

$$x = -1 \pm \sqrt{(35 + 1)} = -1 \pm 6, \text{ oder } x = 5 \text{ und } = -7.$$

§. 49. Das Resultat (2) bietet verschiedene Fälle dar. Wir setzen der Kürze halber $\frac{1}{4}p^2 - q = m$, woraus $q = \frac{1}{4}p^2 - m$; dadurch wird $x^2 + px + q$ in $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 - m$, oder $(x + \frac{1}{2}p)^2 - m$ umgeändert; diese Größe soll nun durch gewisse Werthe von x auf Null gebracht werden.

1) m sei negativ; da $\frac{1}{4}p^2$ immer positiv ist, so hat dieser Fall nur statt, wenn q auf der ersten Seite der vorgelegten Gleichung positiv und $> \frac{1}{4}p^2$ ist. Alsdann wird aber diese Gleichung $(x + \frac{1}{2}p)^2 + m = 0$; man soll also die Summe zweier positiven Größen Null machen, ein offenbar ungereimtes Problem. Da man hier $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{-m}$ findet, so kann das Symbol $\sqrt{-m}$, das an und für sich absurd ist, dazu dienen, diesen Fall zu bezeichnen. Das Problem ist folglich ungereimt, sobald die Wurzeln imaginär sind, d. h. wann q positiv auf der ersten Seite der Gleichung (1) ist, und das Quadrat des halben Coefficienten p des zweiten Gliedes übertrifft.

Wir sagen aber in einem solchen Falle dennoch, die Gleichung habe zwei Wurzeln, weil diese Werthe $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{-m}$, den nämlichen Rechnungen, als wenn sie reell wären, unterworfen, d. h. durch ihre Substitution anstatt x in die Gleichung, einer solchen genug thun; wir betrachten dies als eine reine algebraische Thatsache. Gerade so können die negativen Werthe, die eigentlich an und für sich keinen Sinn haben, als Auflösung einer Gleichung gelten, ohne deswegen der Aufgabe zu entsprechen, in so fern nicht irgend eine Modification in der Aussage derselben eingetreten ist.

Anmerkung. Es gibt Aufgaben, die Widersprüche enthalten, also keiner wirklichen Auflösung fähig sind. Die Algebra beweist durch ihre Antwort, daß das Gesuchte gar nicht vorhanden ist. Hierher gehört die Aufgabe: Eine Zahl zu finden, welche die Eigenschaft hat, daß ihr Quadrat um 20 kleiner ist, als das vierfache Produkt derselben. Man hat die Gleichung $x^2 + 20 = 4x$, oder $x^2 - 4x = -20$; woraus $x = 2 \pm \sqrt{-4}$. Es existirt also keine Zahl, die die verlangte Eigenschaft besitzt.

2) m sei Null; q muß deshalb gleich $\frac{1}{4}p^2$ und positiv auf der ersten Seite der Gleichung (1) sein; alsdann ist $x^2 + px + q$ das Quadrat von $x + \frac{1}{2}p$, und die Wurzeln sind gleich; es ist dies der Uebergang von den imaginären zu den reellen Wurzeln.

3) m sei positiv; q ist dann auf der ersten Seite der Gleichung negativ, es sei denn, daß q positiv und $< \frac{1}{4}p^2$ wäre. In diesem Falle ist (§. 6)

$$(x + \tfrac{1}{2}p)^2 - m = (x + \tfrac{1}{2}p + \sqrt{m}) \times (x + \tfrac{1}{2}p - \sqrt{m}).$$

Es sind dies die Factoren der ersten Seite der vorgelegten Gleichung (1);

die Wurzeln sind $-\frac{1}{2}p - \sqrt{m}$ und $-\frac{1}{2}p + \sqrt{m}$, deren Summe $-p$ und Produkt $\frac{1}{4}p^2 - m$ oder q macht.

4) Ist m ein vollständiges Quadrat, so sind die beiden Wurzeln rational.

5) Sollen beide Wurzeln reell sein und einerlei Zeichen haben, so muß $\frac{1}{2}p$ die Radicalgröße, welche das Zeichen $\pm$ hat, übertreffen; also $\frac{1}{2}p > \sqrt{m}$, oder $\frac{1}{4}p^2 > \frac{1}{4}p^2 - q$, oder endlich $q > 0$. Wenn q also negativ ist, so haben die Wurzeln verschiedene Zeichen; ist es aber positiv und $< \frac{1}{4}p^2$, so haben sie einerlei Zeichen, und zwar ist es dem von p entgegengesetzt. Siehe §. 6, was die Auslegung der negativen Wurzeln anlangt.

Anmerkung. Man soll z. B. eine Zahl finden, deren Quadrat um das Fünffache dieser Zahl, und noch um 5 vermehrt, eine Summe gibt, die gleich 1 ist. Man hat also die Gleichung $x^2 + 5x + 5 = 1$, oder $x^2 + 5x = -4$; woraus $x = -1$ und -4. Die Zeichen $-$ deuten auf eine in der Aussage zu machende Modification hin. Man ändert hiernach die Aufgabe in folgende um: Eine Zahl zu finden, die die Eigenschaft hat, daß wenn man ihr fünffaches Produkt von ihrem Quadrat abzieht und zum Reste 1 addirt, das Resultat gleich 1 sei. Man erhält $x^2 - 5x + 5 = 1$, oder $x^2 - 5x = -4$, was für x die positiven Werthe 4 und 1 gibt.

6) Ist $q = 0$, so hat man, ohne zur Formel (2) seine Zuflucht zu nehmen, $x^2 + px = x(x + p) = 0$; woraus $x = 0$ und $x = -p$.

7) Ist $p = 0$, so hat man die reine quadratische Gleichung $x^2 + q = 0$, woraus $x = \pm\sqrt{-q}$, ein reeller oder imaginärer Ausdruck, je nachdem das Zeichen von q beschaffen ist.

Anmerkung. Man könnte glauben, das doppelte Zeichen $\pm$ auch vor x setzen zu müssen, was geben würde $\pm x = \pm\sqrt{q}$. In diesem Falle hätte man

$$+x = +\sqrt{q}, \quad +x = -\sqrt{q}$$
$$-x = -\sqrt{q}, \quad -x = +\sqrt{q};$$

es ist indessen leicht einzusehen, daß mit den beiden obern Gleichungen die beiden untern zusammenfallen, wenn man die letztern beiderseits mit -1 multiplicirt: $\pm x = \pm\sqrt{q}$ sagt also nichts mehr als $x = \pm\sqrt{q}$. Ueberdies ist x als Stellvertreter der Unbekannten mit dem Zeichen $+$ in den Calcul eingeführt worden, in diesem Zustande also sein Werth zu bestimmen.

8) Eine unreine quadratische Gleichung läßt sich auf eine reine quadratische zurückführen. Man setze nämlich $x = y - \frac{1}{2}p$. Dieser Werth für x in die Gleichung (1) substituirt, verwandelt sie in $y^2 = \frac{1}{4}p^2 - q$, woraus $y = \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$; also $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$.

9) Hat die vorgelegte Gleichung die Form $Ax^2 + Bx + C = 0$, so können wir nach dem Gesagten das erste Glied von seinem Coefficienten A befreien, indem wir alle Glieder mit diesem Coefficienten dividiren. Wir können aber auch dieses Glied zu einem vollständigen Quadrat machen, indem wir alle Glieder mit $4A$ multipliciren. Wir bekommen dann $4A^2x^2 + 4ABx + 4AC = 0$.

Vergleichen wir, wie oben, diese Gleichung mit dem Quadrate von $2Ax + n$, so sieht man, daß, um das Quadrat zu vollenden, man $n = B$ zu setzen und B^2 auf beiden Seiten hinzuzufügen hat. Wir haben folglich

$$(2Ax + B)^2 = B^2 - 4AC, \text{ und } x = \frac{-B \pm \sqrt{(B^2 - 4AC)}}{2A}.$$

Löst man auf diese Weise die Gleichung

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

in Bezug auf y auf, so findet man

$$y = \frac{-Bx - D \pm \sqrt{[(B^2 - 4AC)x^2 + 2(BD - 2AE)x + D^2 - 4AF]}}{2A}.$$

10) Man hat $Ax^2 + Bx + C = A[(x + \frac{1}{2}p)^2 - m]$; die Wurzeln sind imaginär, gleich oder reell, je nachdem m negativ, Null oder positiv ist. In den beiden ersten Fällen hat das Produkt oder das Polynom $Ax^2 + Bx + C$, da der Multiplicator von A positiv ist, einerlei Zeichen mit A, welchen Werth man auch dem x beilegen mag. Ist aber m positiv, und sind a und b die reellen Wurzeln, so hat man $Ax^2 + Bx + C = A(x - a)(x - b)$. Hieraus ist ersichtlich, daß das Resultat einerlei Zeichen mit A hat, sobald man dem x größere oder kleinere Werthe als a und b gibt; ein verschiedenes Zeichen wird es aber erhalten, wenn x zwischen a und b liegt. Das Trinom, welches in den andern Fällen für alle möglichen Werthe von x dasselbe Zeichen beibehält, ändert folglich jetzt zweimal sein Zeichen, sobald man nämlich x von einem zwischen a und b gelegenen Zustande zu einem andern, der entweder $>$ oder $<$ als a und b ist, übergehen läßt.

Anmerkung. Hier schließt sich die Aufgabe an, für x nämlich einen Werth zu finden, der das Polynom $x^2 + px + q$ gewiß

positiv mache. Man sieht leicht, daß der ungünstigste Fall derjenige ist, wo p und q beide negativ sind. Ist m gleich der größern von den beiden Zahlen p und q, so wird die Größe, welche $x^2 > mx + m$ macht, offenbar auch $x^2 > px + q$ machen. Diese Ungleichheit wird nun durch die Gleichung $x^2 = mx + m + 1$ erfüllt. Durch Versetzung erhält man aus derselben $x^2 - 1 = m(x+1)$, oder $x - 1 = m$, woraus $x = m + 1$. Substituirt man also den größten der Coefficienten des Polynoms, vermehrt um 1 statt x, so erhält dasselbe einen positiven Werth.

Uebungsbeispiele:

Erster Fall:

$9x^2 - 12x + 8 = 0 \ldots x = \frac{2}{3} \pm \frac{2}{3}\sqrt{-1}$,

zweiter Fall:

$9x^2 - 12x + 4 = 0 \ldots x = \frac{2}{3}$,

dritter und vierter Fall:

$9x^2 - 12x + 3 = 0 \ldots x = \frac{2}{3} \pm \frac{1}{3}$, oder $x = 1$, und $x = \frac{1}{3}$,

$2x^2 + 3x + 1 = 0 \ldots x = -\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}$, oder $x = -\frac{1}{2}$, und $x = -1$,

$x^2 - x - 2 = 0 \ldots x = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$, oder $x = 2$, und $x = -1$,

fünfter Fall:

$x^2 - 5x = -6 \ldots x = 3$, und $x = 2$,

siebenter Fall:

$x^2 - 9 = 0 \ldots x = 3$, und $x = -3$,

$x^2 + 9 = 0 \ldots x = \pm 3\sqrt{-1}$.

§. 50. Beispiele zur Uebung im Anschreiben der Gleichungen und zur Auslegung der Werthe der Unbekannten:

I. Eine Zahl x zu finden, deren Quadrat um 2 verringert zum Reste 1 gibt? Man hat $x^2 - 2 = 1$, woraus $x = \pm\sqrt{3}$.

II. Eine Zahl a dergestalt in zwei Theile zu zerlegen, daß das $m$fache des ersten mit dem $n$fachen des zweiten multiplicirt das Produkt p gäbe? Man hat

$$mxn(a-x) = p, \text{ woraus } x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}a^2 - \frac{p}{mn}\right)}.$$

Soll man a in zwei Theile theilen, deren Produkt gleich p sei, so muß man $m = n = 1$ setzen. Da die Wurzeln imaginär werden, sobald $p > \frac{1}{4}a^2$, so sieht man, daß das Produkt das Quadrat der

Hälfte von a nicht übersteigen kann, d. h. das Quadrat von $\frac{1}{2}a$ ist das größtmögliche Produkt, welches man aus den Theilen von a bilden kann. (§. 6.)

III. Aus dem Produkte p zweier Zahlen und ihrer Differenz d eine jede derselben zu finden? Man hat $xy = p$, $x - y = d$; woraus $x = \frac{1}{2}d \pm \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + p)}$, und $y = -\frac{1}{2}d \pm \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + p)}$.

IV. Die Summe zweier Zahlen ist $= a$, und die ihrer Cuben $= b$. Welche Zahlen sind es?
Man hat $x + y = a$, $x^3 + y^3 = b$; hieraus ergibt sich $a^3 - 3a^2x + 3ax^2 = b$. Setzt man $b = af$, so findet man $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{3}f - \frac{1}{12}a^2)}$, und $y = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{3}f - \frac{1}{12}a^2)}$.

V. Welche Zahl ist es, deren $p$te Potenz $n$mal genommen, gleich dem $m$fachen ihrer $(p+2)$ten Potenz sei? $x = \pm\sqrt{\frac{n}{m}}$.

VI. Mehrere Personen sollen die Unkosten eines Prozesses mit 800 fl. tragen. Drei sind aber unter ihnen unzahlfähig; aus diesem Grunde sind die übrigen genöthigt, ausser ihrem Antheile jede 60 fl. mehr zu geben. Wie viel Personen sind es? Man hat $\frac{800}{x+3} = \frac{300}{x} - 60$; woraus $x^2 + 3x = 40$ und $x = 5$. Die negative Wurzel -8 auszulegen, ist leicht.

VII. A ——D—— B. In den Punkten A und B, deren Distanz a ist, befinden sich zwei Lichter von verschiedener Hellung; die Lichtstärke von A verhält sich zu der von $B = m : 1$. Den Punkt D in dieser Linie zu finden, wo beide Lichter gleiche Beleuchtung hervorbringen, wenn man weiß, daß die Erleuchtung von einem leuchtenden Punkte im umgekehrten Verhältniß des Quadrats der Entfernung vom leuchtenden Punkte abnimmt.

Es seien α und β die Erleuchtungsgrade der Lichtpunkte A und B in der Entfernung 1; $\frac{\alpha}{1}$, $\frac{\alpha}{4}$, $\frac{\alpha}{9}$ ... werden dann diejenigen darstellen, welche der Punkt in den Entfernungen 1, 2, 3 ... von A erhält, also $\frac{\alpha}{x^2}$ die des Punktes D, welcher der Entfernung $x = AD$ entspricht, da $BD = a - x$, so ist die von B ausgehende Beleuchtung in $D = \frac{\beta}{(a-x)^2}$. Der Aufgabe zufolge ist $\frac{\alpha}{x^2} = \frac{\beta}{(a-x)^2}$,

woraus $\frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{x}{a-x}\right)^2$. Setzt man $\alpha = m\beta$, zieht dann die Wurzel aus, so findet man endlich $x = \frac{a\sqrt{m}}{\sqrt{m} \pm 1}$ oder $x = \frac{a}{m-1}(m \mp \sqrt{m})$.

Im Allgemeinen muß man die doppelte Irrationalität in den beiden Gliedern des Bruches, namentlich die im Nenner, vermeiden. (Arithmetik §. 65). Man hat deshalb hier oben und unten mit $\sqrt{m} \mp 1$ multiplicirt, was den Nenner auf $m - 1$, und den Zähler auf $a\sqrt{m}$ $(\sqrt{m} \pm 1)$ bringt. In ähnlichen Fällen wird man ein Gleiches thun.

VIII. Ein Bruch $\frac{a}{b}$ ist gegeben; welche Zahl ist es, die das eine Mal dem Zähler, das andere Mal dem Nenner hinzugefügt, das erste Resultat gleich $k$mal dem zweiten macht? Man hat die Gleichung $\frac{a + x}{b} = \frac{ka}{b + x}$, woraus

$x^2 + (a+b)x = ab(k-1)$; folglich $x = -\frac{1}{2}(a+b) \pm \frac{1}{2}\sqrt{[(a-b)^2 + 4abk.]}$

Viertes Kapitel.

Von den Verhältnissen.

Von den Proportionen.

§. 51. 1) Die arithmetische Proportion $a \cdot b : c \cdot d$ ist gleichgeltend mit $a - b = c - d$, woraus $a + d = c + b$. In einer stetigen Aequidifferenz ist $\div a \cdot b \cdot d$, woraus $2b = a + d$. (Siehe Arith. §. 72.)

2) Es sei die geometrische Proportion $a : b = c : d$, oder $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; man hat $ad = bc$, woraus $d = \frac{bc}{a}$. In einer stetigen Proportion $\div a : b : d$ hat man $b = \sqrt{ad}$. (Siehe Arith. §. 72).

3) Die Gleichung $a^2 - b^2 = m - m^2$ oder $(a+b)(a-b) = m(1-m)$ gibt die Proportion $\frac{a+b}{m} = \frac{1-m}{a-b}$. — Eben so leitet man aus $1 - x^2 = a$ die Proportion $\frac{1+x}{1} = \frac{a}{1-x}$ ab.

4) Man kann zu beiden Theilen der Gleichung $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ eine und dieselbe Größe m hinzusetzen, oder davon wegnehmen, so daß man erhält

$$\frac{a \pm mb}{b} = \frac{c \pm md}{d}, \text{ woraus } \frac{a \pm mb}{c \pm md} = \frac{b}{d}.$$

Ist $m = 1$, so wird man blos haben $\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{b}{d}$. (Siehe Arithmetik §. 73.)

5) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \ldots$ sei eine Reihe gleicher Verhältnisse, so daß $\frac{a}{b} = q$, oder $a = bq$, $c = dq$, $e = fq \ldots$. Fügt man alle diese Gleichungen Theil für Theil an einander, so kommt $a + c + e + \ldots\ldots = q(b + d + f + \ldots)$; woraus $\frac{a+c+e+\ldots}{b+d+f+\ldots} = q = \frac{a}{b}$. (Arithmetik §. 73.)

6) Aus der Proportion $a : b = c : d$ schließt man

$$a^m : b^m = c^m : d^m, \text{ und } \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}.$$

Anmerkung. Wir sagen es wiederholt, die Lehre der Proportionen ist unnöthig; einfacher ist's, statt derselben die ihnen entsprechenden Gleichungen zu gebrauchen.

Von den arithmetischen Progressionen.

§. 52. Es sei $\div a \cdot b \cdot c \ldots i \cdot k \cdot l$ eine arithmetische Progression in der d das Verhältniß oder die Differenz bezeichnet. Man hat die $(n-1)$ Gleichungen $b = a + d$, $c = b + d$, ... $l = k + d$; werden sie addirt, so kommt $l = a + d\,(n-1)$, wie in §. 85 der Arithmetik.

Man nennt diesen Ausdruck für das $n$te Glied der Reihe das allgemeine Glied derselben; es stellt, wenn man nach und nach $n = 1, 2, 3 \ldots$ setzt, sämmtliche Glieder dar.

Bezeichnet s das summatorische Glied oder Summenglied der Progression, d. h. die Summe ihrer n ersten Glieder, so wird man haben:

$$s = a + b + c + \ldots + i + k + l,$$

oder $s = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots [a + (n-1)d]$.

Schreibt man die Glieder des zweiten Theils in umgekehrter Ordnung, so wird man ferner haben

$$s = l + (l-d) + \ldots + [l-(n-1)d].$$

Addirt man die beiden letztern Gleichungen, so ist, da jedes Paar correspondirender Glieder eine und dieselbe Summe hervorbringt, $2s$ offenbar $= (a+l)$, so oftmal genommen, als Einheiten in n enthalten sind, oder es ist $s = \frac{1}{2}n(a+l)$. Man kann überhaupt bemerken, daß die Summe der beiden äussersten Glieder gleich der Summe von je zwei andern ist, deren eins so weit vom ersten Glieder als das andere vom letzten absteht. Ist die Anzahl der Glieder ungerade, so ist die Summe der beiden äussersten Glieder gleich dem doppelten mittlern Gliede.

§. 53. In den beiden Gleichungeu $l = a + (n-1)d$ und $s = \frac{n(a+l)}{2}$ kommen fünf Größen vor. Sind also drei von ihnen gegeben, so können die zwei andern mit Hülfe dieser Gleichungen gefunden werden.

Anmerkung. Es entspringen hieraus eigentlich zwanzig verschiedene Aufgaben; die Aufstellung dieser verschiedenen Fälle ist leicht und eine gute Uebung.

Wir geben nun einige Beispiele zur Anwendung der Lehre von den arithmetischen Progressionen.

I. Man soll n finden, wenn a, d und s bekannt sind? Die Elimination von l gibt $s = an + \frac{1}{2}dn(n-1)$; woraus

$$n = \tfrac{1}{2} - \frac{a}{d} \pm \sqrt{\left(\frac{2s}{d} \pm [\tfrac{1}{2} - \tfrac{a}{d}]^2\right)}.$$

Ein freifallender Körper z. B. fällt in der ersten Sekunde einen Raum von 4,9 Meter, und in jeder folgenden Sekunde immer 9,8 Meter mehr als in der vorhergehenden. Wie viel Sekunden braucht der Körper zu einem Fallraum von 400 Meter? Man hat $s = 400$, $a = 4{,}9$, $d = 2a = 9{,}8$; woraus $n = \sqrt{\frac{s}{a}} = \sqrt{\frac{400}{4{,}9}} = 9'',03$ und $l = 83^{m},6$ ohngefähr.

II. Wie viel Schläge macht eine Uhr innerhalb zwölf Stunden? Schlägt sie nur die ganzen Stunden, so kommt $1+2+3+\ldots+12$; woraus $s = 6 \times 13 = 78$. Zeigt sie auch die halben Stunden an, so kommt $2+3+4\ldots + 13$; woraus $s = 90$.

III. Es liegen eine Anzahl Kanonenkugeln in 18 Reihen über einander, so daß jede untere Reihe immer zwei Kugeln mehr als die vorhergehende enthält. Wie viel Kugeln liegen in der untersten Reihe und wie viel in allen diesen Reihen zusammen, wenn die oberste deren 3 enthält? Hier ist $a = 3$, $n = 18$, $d = 2$; man findet $l = 37$ und $s = 360$.

IV. Man soll zwischen zwei gegebenen Zahlen a und l eine Anzahl m mittlere arithmetische Proportionalen einschalten. Da $m + 2 = n$, so ist $l = a + d(m+1)$, woraus $d = \frac{l-a}{m+1}$, wie in §. 85 der Arithmetik.

Von den geometrischen Progressionen.

§. 54. Es sei $\div a : b : c : d \ldots i : l$, eine geometrische Progression wo q das Verhältniß oder den Quotienten darstellt. Man hat die $(n-1)$ Gleichungen $b = aq$, $c = bq$, $d = cq \ldots$ $l = iq$; multiplicirt man diese Gleichungen Glied für Glied mit einander und unterdrückt die gemeinschaftlichen Factoren, so kommt $l = aq^{n-1}$, wie in §. 86 der Arithmetik, als Ausdruck für das allgemeine Glied. Man kann einer geometrischen Reihe immer folgende Gestalt $\div a : aq : aq^2 \ldots : aq^{n-1}$ geben; die ganzen und successiven Potenzen einer und derselben Größe bilden also eine geometrische Progression. Dasselbe gilt bei jeder Reihe von Gliedern, deren Exponenten in arithmetischer Progression stehen; eine solche Reihe ist $bx^m + bx^{m+h} + bx^{m+2h} + \ldots$, die auf die erste zurückkommt, wenn man $a = bx^m$ und $q = x^h$ setzt.

Addiren wir unsre $(n-1)$ ersten Gleichungen, so kommt

$$(b+c+d+\ldots+l) = (a+b+c+\ldots+i)q.$$

Bezeichnet man das summatorische Glied durch s, so wird man

$$b+c+d+\ldots+l = s-a, \text{ und } a+b+c\ldots+i = s-l$$

haben, woraus man schließt

$$s-a = (s-l)q, \text{ oder } s = \frac{lq-a}{q-1}.$$

Bei einer abnehmenden Reihe findet dies Alles ebenfalls statt, nur ist $q < 1$. In dem Maße aber als die Reihe fortgesetzt wird, nähert sich die Summe s der in Betracht gezogenen Glieder immer mehr und mehr der Summe S der ganzen Reihe. Es sei nun α die Differenz $S - s$, eine ins Unendliche abnehmende Größe; eben so kann l kleiner als jede angebliche noch so kleine Größe werden. Hiernach (§. 22) $S - \alpha = \frac{a}{1-q} - \beta$, wenn $\beta = \frac{lq}{1-q}$ gesetzt wird, woraus

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

Wir haben folglich, wie in §. 8, die vollständige Summe einer ins Unendliche fortlaufenden geometrischen Reihe, deren erstes Glied a und Verhältniß q ist, wo $q < 1$. Wir würden den nämlichen Ausdruck für S gefunden haben, wenn wir in dem Werthe von s die Größe l, als eine unendlich kleine Größe, gleich Null gesetzt hätten.

Anmerkung. Die Größe $\frac{a}{1-q}$ ist also die Grenze, welcher sich die durch 1 ausgedrückten Partialsummen immer mehr und mehr nähern. Wenden wir dies auf die Progression $\div 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} \ldots$ an, so ist $S = 2$. Je mehr Glieder wir folglich in jener Progression nehmen, desto mehr wird sich ihre Summe der Zahl 2 nähern.

Ist $q = 1$, so ist $s = \frac{ql - a}{q-1} = a\,\frac{(q^n - 1)}{q-1} = \frac{0}{0}$. Die Progression ist aber in diesem Falle $a + a + a + a \ldots$, die Summe der n ersten Glieder, also $= na$. Der Grund der Unbestimmtheit liegt in der Gleichung selbst, aus der s abgeleitet wurde. Wir haben nämlich $S(q-1) = a(q^n - 1)$, welcher Ausdruck für $q = 1$ identisch wird. Die Gleichung $s\,(1-1) = 0$, sagt aber dann etwas aus, was nicht blos der fraglichen Größe s, sondern jeder andern Größe zukommt. Es darf also nicht befremden $s = \frac{0}{0}$ zu finden, obschon es nur einen Werth hat.

Ist $q > 1$, so wächst aq^n mit n bis ins Unendliche, und es wird für $n = \frac{1}{0}$ auch $S = \frac{1}{0}$.

Einige Anwendungsbeispiele:

I. Nach dem Berichte eines arabischen Schriftstellers wurde dem Erfinder des Schachspieles, Namens Sessa, die von ihm gewählte Beloh-

nung durch einen König in Indien bewilligt, die dieser als eine zu mäßige Forderung betrachtete; es war solche nichts anders als die Summe der Waizenkörner, die herauskommt, wenn 1 für das erste Feld des Schachbretts, 2 für das zweite, 4 für das dritte, und so fort für jedes der 64 Felder doppelt so viel als für das vorhergehende gerechnet werden. Welches ist diese Summe? Man hat $a=1$, $q=2$, $n=64$; woraus $t = 2^{63}$ und $s = 2^{64} - 1$. Man findet für $s =$ 18446774073709551615. Nun enthält ein Kilogramm Waizen ohngefähr 26150 Körner; von einem Hectar werden etwa 1750 Kilogramme Getraide gewonnen, also ohngefähr 45762500 Körner. Wird die Summe s durch die letztere Zahl dividirt, so findet man, daß Sessa die Erndte von 403000 Millionen Hectare, d. h. von einer achtmal größern Fläche als die der ganzen Erdkugel, die Meere, Seen, Wüsten rc. mit inbegriffen, gefordert hatte.

II. Jemand will sein Pferd unter folgenden Bedingungen verkaufen: Er verlangt 1 Heller für den ersten Nagel, 2 für den zweiten, 4 für den dritten, und so fort für jeden der 32 Nägeln doppelt so viel, als für den vorhergehenden. Wie hoch beläuft sich der Preis des Pferdes? Die Bezahlung wird in einer geometrischen Progression verlangt, wo $a = 1$, $q = 2$ und $n = 32$. Man findet hiernach $s = 2^{32} - 1 = 4294967295$ Heller. Nun ist 1 fl. = 60 . 4 Heller; also sind 4294967295 Heller gleich 17895697,0625 fl.

Mit Hülfe der beiden Gleichungen $l = aq^{n-1}$ und $s - a = (s - l)q$ kann man von den fünf Größen a, b, n, q und s jede beliebige zwei finden, wenn die drei andern gegeben sind. Uebrigens lassen sich die hierbei vorkommenden Rechnungen zuweilen nur nach den später auseinandergesetzten Methoden behandeln. Ist z. B. a, n und s gegeben, so kann man q nur durch Auflösung der Gleichung $aq^n - sq + s = a$, die vom $n$ten Grade ist, finden. Ist der Exponent n unbekannt, l, a und q aber gegeben, so muß man seine Zuflucht zur Lehre von den Logarithmen nehmen.

Anmerkung. Wenn q und n sich unter den gegebenen Größen befinden, so führen die Aufgaben dieser Art zu Gleichungen vom ersten Grade.

Von den Logarithmen.

§. 55. Wir wollen x in der Gleichung $y = a^x$ sich ändern lassen, und die entsprechenden Veränderungen von y näher betrachten.

1) Für $a > 1$ wird, wenn man $x = 0$ setzt, $y = 1$, und wenn $x = 1$, so ist $y = a$. In dem Maße als x von 0 bis 1 wächst, wird y von 1 bis a wachsen; nimmt x von 1 an weiter bis ins Unendliche zu, so wird y von a bis ins Unendliche zunehmen. Dergestalt wird, indem x durch alle möglichen Zwischenwerthe nach dem Gesetze der Stetigkeit fortschreitet, auch y, obgleich weit rascher, sich vermehren. Nimmt man hingegen x negativ, so verwandelt sich unsre Gleichung in $y = a^{-x}$, oder $y = \frac{1}{a^x}$, wo die Werthe von y immer kleiner und kleiner werden, in dem Maße als x wächst, so daß y von 1 bis 0 abnimmt, während x negativ größer wird; dem unendlichen x negativ genommen entspricht $y = 0$.

Anmerkung. Der Logarithme von Null ist dem negativen Unendlichen gleich, soll nichts anders heißen, als daß der Logarithme einer sehr kleinen Zahl eine sehr große negative Zahl ist.

2) Für $a < 1$ setzen wir $a = \frac{1}{b}$, folglich $b > 1$; alsdann $y = \frac{1}{b^x}$, oder $y = b^x$, je nachdem x positiv oder negativ genommen wird. Wir kommen also auf den ersten Fall zurück, mit dem Unterschiede, daß x positiv ist, wann $y < 1$, und negativ für $y > 1$.

3) Ist $a = 1$, so wird man immer $y = 1$ haben, welchen Werth man auch der Größe x geben möge.

In der Voraussetzung, daß a von der Einheit verschieden ist, können wir also immer für x einen Werth finden, wodurch a^x irgend einer gegebenen Zahl gleich wird. Der ausgebreitete Gebrauch, welchen man von diesen schönen Eigenschaften der Gleichung macht, erfordert, daß wir ihren Theilen, um Umschreibungen zu vermeiden, bestimmte Benennungen beilegen. Der Werth von x wird darin der Logarithme der Zahl y genannt; die willkührliche und unveränderliche Zahl heißt die Basis oder Grundzahl. Der Logarithme einer Zahl ist folglich nichts anders, als der Exponent der Potenz, auf welche man die Basis erheben muß, um dadurch jene Zahl zu erhalten.

Schreibt man $x = \text{Log.}\, y$, um anzuzeigen, daß x der Logarithme der Zahl y ist, oder daß $y = a^x$, so wird die Basis immer dabei gedacht, da solche, einmal gewählt, unveränderlich bleibt.

Aendert man dieselbe aber, so muß man die neue Basis angeben, d. h. anzeigen, welches logarithmische System in Betracht gezogen wird. So sagen die Gleichungen $10^3 = 1000$ und $2^5 = 32$, daß 3 der Logarithme von 1000, und 5 der von 32 ist; im ersten Falle dient 10 als Basis, im zweiten dagegen ist 2 dieselbe.

4) Eine negative Zahl läßt sich nicht als Basis eines logarithmischen Systems annehmen, weil alsdann für y bald positive, bald negative, bald reelle Größen, bald auch imaginäre Ausdrücke gefunden werden. Alle möglichen Zahlen durch Potenzen einer und derselben negativen Zahl darzustellen ist unmöglich.

§. 56. Aus dem Vorhergehenden ziehen wir jetzt mehrere Folgerungen:

1) In jedem logarithmischen System ist Null der Logarithme von 1, und der Logarithme der Basis ist die Einheit.

2) Für die Basis $a > 1$ sind die Logarithmen von den Zahlen > 1 positiv, während sie von den eigentlichen Brüchen negativ sind. Das Umgekehrte findet statt, wenn die Basis $a < 1$ ist.

3) Ist die Basis einmal fixirt, so hat jede Zahl nur einen einzigen reellen Logarithmen; ändert sich aber die Basis, so ändert sich auch der Logarithme jener Zahl; jede Zahl hat demnach eine unendliche Anzahl von reellen Logarithmen. Für $9^2 = 81$, $3^4 = 81$ z. B. sind 2 und 4 die Logarithmen der nämlichen Zahl 81, je nachdem 9 oder 3 die Basis ist.

4) Die negativen Zahlen haben keine reellen Logarithmen, weil man für y nur positive Werthe von o bis $\frac{1}{0}$ findet, welchen Werth von $-\frac{1}{0}$ bis $+\frac{1}{0}$ man auch der Veränderlichen x beilegen mag. Die Aufstellung einer Logarithmentafel besteht darin, alle Werthe von x, die, der Gleichung $y = a^x$ gemäß, den Zahlen $y = 1, 2, 3 \ldots$ entsprechen, zu bestimmen. Nimmt man $a^\alpha = m$, so erhält man

für $x = 0 \quad \alpha \quad 2\alpha \quad 3\alpha \quad 4\alpha \quad 5\alpha \ldots$ Logarithmen,

bezüglich $y = 1 \quad m^1 \quad m^2 \quad m^3 \quad m^4 \quad m^5 \ldots$ Zahlen.

Die Logarithmen gehen folglich in einer arithmetischen Reihe fort, während die Zahlen in einer geometrischen Reihe vorschreiten. 0 und 1 sind respektive die ersten Glieder dieser Reihen, deren Verhältnisse die willkührlichen Zahlen α und m sind. Man kann hiernach die der Gleichung $y = a^x$ entsprechenden Systeme der Werthe von x und y

als in zwei Progressionen zusammengeordnet betrachten, was die in der Arithmetik angeführte Definition von Logarithmen mit der hier gegebenen in Uebereinstimmung bringt. (Arith. §. 87 und Alg. §. 55).

Das Zeichen Log. soll in der Folge dazu dienen, den Logarithmen einer Zahl in einem unbestimmten Systeme zu bezeichnen, während unter dem Zeichen log. die Briggs'schen Logarithmen, wo 10 die Basis ist, verstanden werden.

Anmerkung. Man bedient sich bei dem Logarithmen auch folgender Schreibart: $\log.^a y = x$, was gelesen wird: der Logarithme von y für die Basis a ist gleich x.

Die Größen a^x und alle die sich daraus herleiten lassen, werden auch Exponentialgrößen genannt.

§. 57. Wir wollen nun mit Hülfe der Algebra die Eigenschaften der Logarithmen beweisen.

1) Es seien x und x' die Logarithmen der Zahlen y und y', oder $x = \text{Log.} y$, $x' = \text{Log.} y'$. Man hat $a^x = y$, $a^{x'} = y'$; werden diese Gleichungen mit einander multiplicirt und dividirt, so erhält man $a^{x+x'} = yy'$, $a^{x-x'} = \frac{y}{y'}$.

Der Definition zufolge sind aber die Exponenten $x+x'$ und $x-x'$ die Logarithmen von yy' und $\frac{y}{y'}$; folglich

$$\text{Log.}\, y + \text{Log.}\, y' = \text{Log.}\, (yy'),$$

$$\text{Log.}\, y - \text{Log.}\, y' = \text{Log.}\, \left(\frac{y}{y'}\right).$$

2) Erhebt man die Gleichung $y = a^x$ auf die $m$te Potenz, oder zieht aus ihr die $m$te Wurzel, so hat man $y^m = a^{mx}$, $\sqrt[m]{y} = a^{\frac{x}{m}}$; die Definition gibt $mx = \text{Log.}(y^m)$, $\frac{x}{m} = \text{Log.} \sqrt[m]{y}$; folglich $\text{Log.}\, y^m = m\, \text{Log.}\, y$, $\text{Log.} \sqrt[m]{y} = \frac{\text{Log.}\, y}{m}$. Es sind diese Resultate mit dem, was wir in der Arithmetik (§. 88) gesehen, übereinstimmend.

3) Will man die Gleichung $c = a^x$, in der c und a gegeben und x unbekannt ist, auflösen; so setzt man die Logarithmen der beiden

Theile einander gleich, was Log. $c = x$ Log. a gibt; hieraus erhält man durch eine einfache Division $x = \frac{\text{Log. } c}{\text{Log. } a}$.

Man kann hiernach den Exponenten n in der auf geometrische Progressionen Bezug habenden Gleichung $l = aq^{n-1}$ (§. 54.) finden; nämlich Log. l = Log. $a + (n-1)$ Log. q, woraus

$$n = 1 + \frac{\text{Log. } l - \text{Log } a}{\text{Log. } q}.$$

Es sei x unbekannt in der Gleichung $Aa^x + Ba^{x-b} + Ca^{x-c} + \ldots\ldots = P$; daraus $a^x \left(A + \frac{B}{a^b} + \frac{C}{a^c} + \ldots\ldots\right) = P$, oder $Qa^x = P$; folglich

$$x = \frac{\log. P - \log. Q}{\log. a}.$$

In der Gleichung $a^z = b$ ist z von x abhängig, indem nämlich $z = Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots\ldots$ Da $z = \frac{\log. b}{\log. a}$ = einer bekannten Zahl K ist, so hat man noch die Gleichung vom $m$ten Grade, $K = Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots\ldots$, aufzulösen. Es sei z. B. $4\,(\frac{2}{3})^{x^2-5x+4} = 9$; hieraus $(x^2 - 5x + 4)$ log. $\frac{2}{3}$ = log. $\frac{9}{4}$; folglich $x^2 - 5x + 4 = -2$, eine Gleichung vom zweiten Grade, die $x = 2$ und $= 3$ gibt.

4) Es seien y und $y + m$ zwei Zahlen; die Differenz ihrer Logarithmen für irgend ein System ist

$$\text{Log.}(y+m) - \text{Log.}\, y = \text{Log.}\left(\frac{y+m}{y}\right) = \text{Log.}\left(1 + \frac{m}{y}\right),$$

eine Größe, die dem Logarithmen von 1, oder Null, in dem Maße sich nähert, als $\frac{m}{y}$ abnimmt, und die desto kleiner wird, je größer y ist. Die Logarithmen zweier Zahlen sind also desto weniger von einander verschieden, je größer die Zahlen sind und je näher sie einander liegen, was gleichfalls mit dem in §. 91 der Arithmetik Gesagten übereinstimmt.

§. 58. Hat man eine Logarithmen-Tafel in einem System, dessen Basis a ist, berechnet, so kann man leicht eine andere Tafel, dessen Basis b ist, daraus ableiten. In der Gleichung $a^x = y$ ist x der Logarithme von y in dem System, dessen Basis a ist; nimmt man nun von beiden Theilen der Gleichung die Logarithmen in dem

System, dessen Basis b ist, so erhält man x Log. a = Log. y. Um also den Logarithmen von y in dem zweiten System zu erhalten, muß man x oder den Logarithmen von y im ersten System mit Log. a multipliciren; multiplicirt man daher sämmtliche Logarithmen der ersten Tafel mit Log. a, so erhält man eine neue Tafel für die Basis b. Dieser constante Factor Log. a, der alle Logarithmen eines Systems a in ein System b überträgt, wird der **Modul** genannt; es ist demnach derselbe nichts anders, als der in dem System b berechnete Logarithme der ersten Basis a. Dividirt man Log. y durch x, welches die Logarithmen einer und derselben Zahl in den Systemen b und a sind, so hat man Log. $a = \frac{\text{Log.}\, y}{x}$, woraus man ersieht, daß der Quotient der auf diese Systeme Bezug habende Modul ist, und daß derselbe unveränderlich bleibt, was auch y für eine Zahl sein mag.

Sollte es daher in irgend einem Falle vortheilhafter sein, ein anderes logarithmisches System als das für die Basis 10 zu wählen; so wird es leicht sein, mit Hülfe einer einzigen Logarithmentafel, z. B. der Briggs'schen, jeden Logarithmen für dieses neue System zu berechnen. Für das System, dessen Basis $= \frac{5}{7}$, ist z. B. der Logarithme von $\frac{2}{3} = \frac{\text{Log.}\, \frac{2}{3}}{\text{Log.}\, \frac{5}{7}} = \frac{\text{Log.}\, 2 - \text{Log.}\, 3}{\text{Log.}\, 5 - \text{Log.}\, 7}$; die Basis ist hier noch beliebig, nimmt man sie = 10 an, so wird alles bekannt, und man erhält $\frac{-0{,}17609125}{-0{,}14612804} = 1{,}2050476$ für den gesuchten Logarithmen.

Aehnlicherweise ist für das System $\frac{3}{2}$ der Logarithme von $\frac{2}{3} = \frac{\log.\, \frac{2}{3}}{\log.\, \frac{3}{2}} = \frac{\log.\, 2 - \log.\, 3}{\log.\, 3 - \log.\, 2} = -1$; was sich übrigens von selbst versteht, da die Gleichung $y = a^x$ in diesem speciellen Falle $\frac{2}{3} = (\frac{3}{2})^x = (\frac{2}{3})^{-x}$ wird, wo x offenbar $= -1$ ist.

§. 59. Es ist von Wichtigkeit, sich in dem Gebrauch der Logarithmen bei den algebraischen Rechnungen zu üben, daher folgende Beispiele:

1) $\log.\, (a.b.c.d\ldots) = \log.\, a + \log.\, b + \log.\, c + \log.\, d \ldots,$

2) $\log.\, \left(\frac{abc}{de}\right) = \log.\, a + \log.\, b + \log.\, c - \log.\, d - \log.\, e,$

3) $\log.\, (a^m . b^n . c^p \ldots) = m \log.\, a + n \log.\, b + p \log.\, c \ldots,$

4) $\log.\, \left(\frac{a^m b^n}{c^p}\right) = m \log.\, a + n \log.\, b - p \log.\, c,$

5) $\log. (a^2 - x^2) = \log. [(a+x)\times(a-x)] = \log.(a+x) + \log.(a-x)$,
6) $\log. \sqrt{(a^2-x^2)} = \frac{1}{2}\log.(a+x) + \frac{1}{2}\log.(a-x)$,
7) $\log. (a^3\sqrt[4]{a^3}) = 3\log. a + \frac{3}{4}\log. a = \frac{15}{4}\log. a$,
8) $\log. \sqrt[n]{(a^3-x^3)^m} = \frac{m}{n}\log.(a-x) + \frac{m}{n}\log.(a^2+ax+x^2)$ (§. 8).

Wird ax dem Trinom hinzugefügt und wieder abgezogen, so wird dasselbe $(a+x)^2 - ax$; setzt man $z^2 = ax$, wo z mittelst der Logarithmen sich finden läßt, so erhält man $(a+x)^2 - ax = (a+x)^2 - z^2 = (a+x+z)(a+x-z)$; folglich $\log. \sqrt[n]{(a^3-x^3)^m} = \frac{m}{n}[\log.(a-x) + \log.(a+x+z) + \log.(a+x-z)]$. Diese Rechnungsweise löst $a^3 - x^3$ in seine Factoren auf und gestattet den Gebrauch der Logarithmen.

9) $\sqrt{(a^2+x^2)}$ wird, wenn man $2ax = z^2$ setzt, gleich $\sqrt{[(a+x)^2 - z^2]}$, woraus $\log. \sqrt{(a^2+x^2)} = \frac{1}{2}[\log.(a+x+z) + \log.(a+x-z)]$.

10) $\log. \frac{\sqrt{(a^2-x^2)}}{(a+x)^2} = \frac{1}{2}[\log.(a-x) - 3\log.(a+x)]$.

11) Um zwischen a und l eine Anzahl m mittlere geometrische Proportionalen einzuschalten, muß man $n = m + 2$ in der Gleichung $l = aq^{n-1}$ (§. 54) setzen. Hieraus zieht man das Verhältniß $q = \sqrt[m+1]{\frac{l}{a}}$ und $\log. q = \frac{\log. l - \log. a}{m+1}$. Die verschiedenen Glieder aq, aq^2...., haben zu Logarithmen $\log. a + \log. q$, $\log. a + 2\log. q$.... Um also 11 mittlere geometrische Proportionalen zwischen 1 und 2 einzuschalten, findet man, weil hier $\log. a = 0$, $\log. q = \frac{1}{12} \times \log. 2 = 0{,}0250858$, und $q = 1{,}059463$. Die Logarithmen der folgenden Glieder sind $2\log. q$, $3\log. q$..., und die geometrische Reihe ist

∺ 1 : 1,059463 : 1,122461 : 1,189207 : 1,259921 : 1,334839 : 1,414213 : 1,498307 : 1,587401 : 1,681792 : 1,781797 : 1,887748 : 2.

(Diese Progression stellt die Verhältnisse der Schwingungszahlen der Töne nach der gleichschwebenden Temperatur dar).

12) In dem System für die Basis a ist $a^{\log. z} = z$, weil nach der Erklärung von Logarithmen in der Gleichung $a^y = z$, y der Logarithme von z ist. Ebenso $a^{h \log. z} = a^{\log.(z^h)} = z^h$.

13) In der Gleichung $b^{n - \frac{a}{x}} = c^{mx} . f^{x-p}$ sei x unbekannt, daraus $(n - \frac{a}{x}) \log. b = mx. \log. c + (x-p) \log. f$. Man hat demnach

die quadratische Gleichung $(m \log. c + \log. f)\, x^2 - (n \log. b + p \log. f)\, x + a \log. b = 0$ aufzulösen.

14) $c^{mx} = a \,.\, b^{nx-1}$ gibt $x = \dfrac{\log. a - \log. b}{m \log. c - n \log. b}$.

15) Wird in $b^{c^x} = d$ gesetzt $c^x = u$, so kommt $b^u = d$, $u \log. b = \log. d$, oder $c^x = \dfrac{\log. d}{\log. b}$; nimmt man von neuem die Logarithmen, so findet man

$$x = \frac{\log. (\log. d) - \log. (\log. b)}{\log. c}.$$

In diesem Ausdruck bezeichnet $\log. (\log. b)$ den Logarithmen von Log. b, welcher erhalten wird, wenn man diesen Logarithmen als eine Zahl betrachtet.

16) Die Bevölkerung einer Stadt vermehrt sich jährlich um $\frac{1}{30}$; wie groß wird die Bevölkerung dieser Stadt nach einem Jahrhundert sein, wenn sie jetzt 100000 Seelen zählt? Setzt man $100000 = m$, so wird die Volksmenge am Ende des ersten Jahres $m + \frac{1}{30} m = m \,.\, \frac{31}{30} = m'$ sein. Am Schlusse des zweiten Jahres wird m' ähnlicherweise $m' \,.\, \frac{31}{30} = m \left(\frac{31}{30}\right)^2$ sein. Nach 100 Jahren ist hiernach die Einwohnerzahl

$m \left(\frac{31}{30}\right)^{100} = x = 2654874$, wie der Calcul zeigt.

$$\begin{aligned} \log. 31 &= 1{,}49136169 \\ -\log. 30 &= 1{,}47712125 \\ &\ 0{,}01424044 \\ 100 \text{ mal} \ldots &\ 1{,}424044 \\ \log. m &= 5{,}000000 \\ \log. x &= 6{,}424044 \end{aligned}$$

Ist die jährliche Vermehrung der Volksmenge $\dfrac{1}{r}$ der frühern, so findet man ebenso die Volksmenge x nach n Jahren durch die Gleichung $x = m \left(\dfrac{1+r}{r}\right)^n$. Man kann irgend eine der Größen x, m, r oder n als unbekannt und die übrigen als gegeben betrachten; man findet sonach

$\log. x = \log. m + n[\log. (1+r) - \log. r]$; $\log. m = \log. x - n[\log. (1+r) - \log. r]$,

$$n = \frac{\log. x - \log. m}{\log. (1+r) - \log. r}, \quad \log. \left(1 + \frac{1}{r}\right) = \frac{\log. x - \log m}{n}$$

Einige Anwendungen zu den vorigen Lehren.

§. 60. Einfache Interessenrechnung. Die einfachen Zinsen z eines zu p Prozent während t Tagen ausstehenden Kapitals a werden mittelst der Gleichung $z = \frac{apt}{36000} = a \times \frac{t}{6000} \times \frac{p}{6}$ gefunden, die die in der Arithmetik (§. 80) gegebene Vorschrift ausspricht.

Zusammengesetzte Interessenrechnung. Werden die Zinsen jedes Jahr zum Kapital geschlagen und aufs neue mit verzinset, so sagt man: das Kapital ist zu zusammengesetzten Zinsen oder Zinseszinsen ausgeliehen. Sind r die jährlichen Zinsen vom Kapital 1, so ist zu Ende des ersten Jahres das Kapital a angewachsen zu $a+ar = a(1+r) = aq$, wenn man $1+r$, der Kürze halber, durch q ausdrückt. Hieraus ist zu Ende des zweiten Jahres geworden $aq \cdot q$, oder aq^2; zu Ende des dritten Jahres aq^3, u. s. w. Bezeichnet daher x den Werth nach n Jahren, so ist $x = aq^n = a(1+r)^n$.

Sind drei von den Größen a, n, x und r oder q gegeben, so kann die vierte Unbekannte mit Hülfe dieser Gleichung gefunden werden. Gewöhnlich sind die Procente p gegeben, in diesem Falle ist $r = \frac{p}{100}$ und $q = \frac{100+p}{100}$.

Wollte man z. B. wissen, in wie viel Zeit ein Kapital von 10000 fl. auf 12000 fl. anwachsen würde, wenn dasselbe zu 5 Prozent auf Zinseszinsen aussteht, so müßte man $p = 5$, $r = \frac{1}{20}$, $q = \frac{21}{20}$ setzen; man fände so $12000 = 10000 \times (\frac{21}{20})^n$, woraus (nach §. 57) $n = 3$ Jahr und 9 Monat ohngefähr.

In der am Ende des Buches beigefügten Tabelle ist angenommen, daß ein Kapital von 1000 fl. zu 4, 5 oder 6 Prozent angelegt sei, und die halbjährlich zu entrichtenden Zinsen wieder zum Kapital geschlagen werden, um sie in der Folge mit der Summe zusammengenommen benutzen zu können. Man sieht aus dieser Tafel, daß ein auf diese Art zu 5 Prozent ausgeliehenes Kapital von 1000 fl. nach 14 Jahren auf die Summe von 1996,50 fl. angewachsen ist. — Es ist also einerlei, wenn die Zinsen von Zinsen zu 5 Procent in Anschlag gebracht werden, ob man 1000 fl. gleich baar, oder 1996,50 fl. nach 14 Jahren zahlt. — Man sieht ferner aus dieser Tafel, daß bei 5 Procent in einem Zeitraume von nicht ganz $14\frac{1}{2}$ Jahren das Kapi-

tal sich verdoppelt, bei 6 Prozent in 19 Jahren es sich schon verdreifacht hat. — Beträgt das Kapital 2 oder 3 tausend fl., so muß man die in der Tafel angegebenen Zahlen verdoppeln, verdreifachen, überhaupt sie für jedes andere Kapital demselben proportional nehmen. Hätte man z. B. 2500 fl. zu 5 Procent auf Zinseszinsen auf 12 Jahre lang ausstehen, so würde das Kapital nach diesem Zeitraum auf 2,5 × 1808,73 fl. = 4521,82 fl. angewachsen sein; es ist also einerlei, ob man jetzt gleich 2500 fl. oder 4521,82 fl. nach 12 Jahren zahlt. — Soll Jemand 30000 fl. in 5 Jahren zahlen, so kann er dafür die Summe von $\frac{30000 \times 1000}{1280,00} = 23436,04$ fl. auf der Stelle geben, wenn mit 5 Procent Zinseszinsen verinteressirt wird.

Anmerkung. Nach n ganzen Jahren wird a zu $a\,(1+r)^n$ ansteigen; diese Summe trägt in $\frac{p}{q}$ Jahr, wo $\frac{p}{q}$ ein ächter Bruch ist, noch $a\,(1+r)^n \cdot r\frac{p}{q}$ Zinsen, so daß die ganze Summe nach $n + \frac{p}{q}$ Jahren $= a(1+r)^n\;(1+r\frac{p}{q})$ ist. Da der letzte Ausdruck mit dem Ausdrucke $a\,(1+r)^n\;(1+r)^{\frac{p}{q}}$ nicht einerlei ist, so folgt hieraus, daß $a\,(1+r)^{n+\frac{p}{q}}$ nicht ganz genau den Werth des Kapitals a nach $n + \frac{p}{q}$ Jahren angibt.

§. 61. Rentenrechnung. Wird eine Zeitlang von einem Kapital a jährlich eine bestimmte Summe x bezogen, so daß durch dieselbe nach und nach das Kapital nebst Zinseszinsen verzehrt ist, so nennt man diese Summe eine Jahrrente, oder Zeitrente, oder Annuität.

Anmerkung. Der Gläubiger, welcher das Kapital a hergibt und dafür die Rente empfängt, heißt Rentier; der Schuldner, der das Kapital oder den Einsatz a erhält, und die Rente x zu zahlen hat, heißt Entrepreneur oder Banquier. Das gegenseitige Uebereinkommen heißt ein Annuitätsvertrag.

Das Kapital a hat zu Ende des ersten Jahres die Größe aq; der Schuldner zahlt x, ist also nur noch $aq - x = a'$ schuldig.

Zu Ende des zweiten Jahres reducirt sich die Schuld a' auf $a'q-x$, oder aq^2-qx-x. Fährt man auf diese Weise fort, mit q zu multipliciren und mit x abzuziehen, um den nach jedem Jahre noch schuldig gebliebenen Rest zu erhalten; so findet man, daß der Schuldner nach der $n$ten geleisteten Zahlung der Rente x, eine Summe z schuldig ist, welche durch die Gleichung

$$z = aq^n - xq^{n-1} - xq^{n-2} \ldots - x,$$

$$\text{oder } z = aq^n - \frac{x(q^n - 1)}{q-1} \text{ bestimmt wird.}$$

Ist die Schuld abgetragen, so ist $z = 0$; alsdann

$$x = \frac{aq^n\ (q-1)}{q^n - 1}, \text{ oder } x[(1+r)^n - 1] = ar(1+r)^n.$$

Sind drei von den Größen x, a, q oder r und n gegeben, so kann die vierte mit Hülfe dieser Formel gefunden werden.

Die Anwendung der Logarithmen ist hier sehr bequem, wird unter Umständen selbst unumgänglich nothwendig. Ist die Gleichung in Bezug auf den Exponenten n aufzulösen, so findet man $q^n\ (x+a-aq)=x$, woraus

$$n = \frac{\log. x - \log. (x + a - aq)}{\log. q}, \text{ oder } n = \frac{\log. x - \log. (x - ar)}{\log. (1 + r)}.$$

Auf dieser Lehre beruht auch die Berechnung der Leib- oder Lebensrente, es ist dies eine Rente, welche der Gläubiger bis zu seinem Tode zu beziehen hat, wo Kapital und Zinsen als abgetragen angesehen werden. Man nimmt hierbei eine gewisse Lebensdauer des Rentiers von der Zeit, wo er das Kapital dem Schuldner als Eigenthum überläßt, an. Die Frage ist alsdann, welche Summe x er jährlich zu beziehen hat, wenn nach Verlauf von n Jahren seine Forderung als erloschen betrachtet werden soll? Es wird diese Rente nach der oben angegebenen Formel für x gefunden. Ist z. B. $a = 100$ fl., und bei einer Leibrente $p = 5$, so ist $x = \frac{100 \cdot (\frac{21}{20})^n}{(\frac{21}{20})^n - 1} \cdot \frac{1}{20} = \frac{5 \cdot (\frac{21}{20})^n}{(\frac{21}{20})^n - 1}$.

Es läßt sich zwar nicht im voraus bestimmen, wie lange der Rentier noch am Leben bleibt; es wird aber zum Behuf der Rechnung eine gewisse Lebensdauer angenommen, die nach den Sterblichkeitstabellen zu berechnen ist. Die wirkliche Lebensdauer kann allerdings von der angenommenen abweichen; allein das Zufällige wird sich dabei um so mehr ausgleichen, je größer die Anzahl der Rentiers ist, indem den einen gerade von der Lebensdauer das zu Gute kommt, was den

andern davon abgeht. Mittelst dieser Tabellen kann man die wahrscheinliche Lebensdauer eines Individuums, dessen Alter bekannt ist, angeben. Die nachstehende erste Linie enthält das Alter des Individuums, die zweite die wahrscheinliche Lebensdauer in den verschiedenen Lebensperioden desselben.

Alter :

1 . 5 . 10 . 15 . 20 . 25 . 30 . 35 . 40 . 45 . 50 . 55 . 60 . 65 . 70 . 75 . 80 Jahre.

Wahrscheinliche Lebensdauer :

37 . $45\frac{1}{2}$. 43 . 39 . $35\frac{1}{2}$. $32\frac{1}{2}$. $29\frac{1}{2}$. 26 . 23 . 20 . 17 . 14 . 11 . $8\frac{2}{3}$. $6\frac{1}{2}$. 5 . $3\frac{1}{2}$ „

Nach dieser Wahrscheinlichkeit der Dauer des menschlichen Lebens verbunden mit dem Anwachsen der Kapitalien, die auf Zinseszinsen ausstehen, werden die Leibrenten berechnet. So hat also z. B. ein Mensch in seinem 40ten Jahre die Hoffnung, noch 23 Jahre zu leben; hiernach findet man $x = 7{,}4$, d. h. für die Einlage eines Kapitals von 100 fl. zu 5 Procent, bezieht die 40 jährige Person eine lebenslängliche Rente von 7,4 fl. jährlich. Auf gleiche Art wird bei den unter dem Namen Tontinen bekannten Instituten verfahren.

Anmerkung. Die Sterblichkeitstabellen zeigen an, wie viele von einer gegebenen Zahl, z. B. 1000, in einem Jahre geborner Menschen, am Ende eines jeden Jahres noch am Leben sind. So leben z. B. von 1000 Gebornen am Ende des 40ten Jahres noch 374. Von 2000 Gebornen leben also am Ende des 40ten Jahres noch 748, und von 500 Gebornen leben am Ende des 40ten Jahres noch 187. Leicht ist es nun, mittelst solcher Tafeln die wahrscheinliche Lebensdauer eines Menschen vom gegebenen Alter zu finden. Man versteht nämlich unter dieser Dauer die Zeit, nach welcher es eben so wahrscheinlich ist, daß man noch lebe, als daß man nicht mehr lebe. Es wird dies alsdann der Fall sein, wenn die Hälfte der Personen jenes Alters gestorben ist. Um z. B. die wahrscheinliche Lebensdauer eines 40 jährigen Menschen zu finden, gibt die Sterblichkeitstabelle die Zahl 374, die Hälfte davon steht bei dem Alter von 63, also ist die wahrscheinliche Lebensdauer eines vierzigjährigen Menschen $63 - 40 = 23$.

Die Tontine ist eine von Lorenzo Tonti erfundene Art Leibrente. Mehrere Individuen legen ein Kapital a in der Kasse der Tontine zusammen an. Die Gesammtheit der Theilhaber

erhält dafür zur Entschädigung jährlich von der Kasse die Summe x. Stirbt nun eines der Mitglieder, so kommt den überlebenden dessen Antheil zu Gute. Bei dem Tode des letzten Mitgliedes hört die Zahlung von Seiten der Kasse auf. Ist n die Zahl der Jahre, die hier bis zum höchsten Alter der Sterblichkeitstabelle verfliessen müssen, so erhält man dieselbe Gleichung wie oben: $x[(1+r)^n - 1] = ar\,(1+r)^n$. Die Summe x wird unter den Tontinenbesitzer nach der Anzahl der Individuen, die jedes Jahr noch leben, vertheilt.

Ueber Sterblichkeitstabellen, Zeitrenten, Leibrenten ꝛc. siehe J. J. Littrows Werkchen über Lebensversicherungen und andere Versorgungsanstalten.

§. 62. Rabattrechnung. Bezeichnet man das Kapital durch a, die Procente durch p, so sind $\frac{apn}{100}$ die Interessen in n Jahren. Die nach n Jahren fällige Summe a hat also, wenn der Rabatt in 100 genommen wird, einen gegenwärtigen Werth

$$x = a(1 - \tfrac{pn}{100}).$$

Bei dem Rabatt auf 100 sagt man dagegen: auf was wird a reducirt, wenn $100 + pn$ auf 100 sich reducirt? Hiernach

$$x = \frac{100\,a}{100+pn}.$$

Will man bei der nach n Jahren fälligen Summe a die Zinseszinsen während dieser Zeit in Anschlag bringen, so muß man zu der Formel in §. 50 seine Zuflucht nehmen. Man hat in diesem Falle die Gleichung $x = \frac{a}{q^n}$.

Anmerkung. Nimmt man bei der Rabattrechnung nur die einfachen Zinsen in Betracht, so heißt dieselbe eine einfache Rabattrechnung; während sie eine zusammengesetzte genannt wird, sobald die Zinseszinsen in Anschlag kommen. Bei der einfachen Rabattrechnung ist die Frage eigentlich folgende: welche Summe wächst in n Jahren nebst den einfachen Zinsen zu p Prozent, zur Größe a an? Man hat hiernach die Gleichung: $x(1+\frac{np}{100}) = a$, woraus $x = \frac{100}{100+np}a$. Die Differenz $a - \frac{100}{100+np}a = \frac{np}{100+np}a$ ist der einfache Rabatt (Rabatt auf 100). — Der Ra-

batt in 100 (Disconto) ist $\frac{apn}{100}$; der jetzt zahlbare Werth für a wäre demnach $x = a\ (\frac{100-pn}{100})$. Der Rabatt auf 100 ist also immer kleiner als der Rabatt in 100; wie es auch sein muß, da hier die Interessen von einem größern Kapital als vorhin genommen werden. Das Unrichtige bei Berechnung des Rabatts in 100 zeigt sich sehr auffallend, wenn $pn = 100$ ist, in welchem Falle auf eine in n Jahren fällige Summe a der Abzug a beträgt; also gar nichts bezahlt wird, was nicht möglich ist.

§. 63. **Regula Falsi.** Es sei $ax = b$ die Gleichung, welche die Theile einer Aufgabe mit einander verbindet. Nimmt man für x einen beliebigen Werth s an, und unterwirft denselben den Bedingungen der Aufgabe, so wird es Zufall sein, wenn man $as = b$ finden sollte. Wir wollen demnach voraussetzen, daß man $as = c$ erhalte. Dividiren wir diese letzte Gleichung nun Glied für Glied durch $ax = b$, so kommt $\frac{s}{x} = \frac{c}{b}$. Das gefundene Resultat verhält sich also zu dem zu findenden wie die angenommene Zahl zu der gesuchten.

I. Man sucht z. B. eine Zahl, deren $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{5}$ter Theil zusammen 456 ist. Nehmen wir an, daß 200 diese Zahl sei, so ist ihre Hälfte plus ihrem Viertel plus ihrem Fünftel 190 anstatt 456. 200 ist also nicht die gesuchte Zahl; wir setzen nun die Proportion: $190 : 456 = 200 : x$, woraus $x = 480$.

II. In welcher Zeit wird ein Wasserbehälter durch vier zugleich geöffnete Röhren gefüllt werden? Durch die erste Röhre kann solches in 2, durch die zweite in 3, durch die dritte in 5, durch die vierte in 6 Stunden geschehen. Nehmen wir an, daß man eine Stunde nöthig habe, so füllt das erste Rohr die Hälfte des Behälters, das zweite ein Drittel, das dritte ein Fünftel, das vierte ein Sechstel, was in Summa $\frac{6}{5}$ macht. Die Voraussetzung einer Stunde war demnach falsch; wir sagen also: $\frac{6}{5} : \frac{5}{5} = 1 : x = \frac{5}{6}$ Stunde $= 50$ Minuten.

Obgleich diese Vorschrift bei der Gesellschaftsregel, der Interessenrechnung u. s. w. anwendbar ist, so ist sie es doch nicht bei allen Aufgaben des ersten Grades, weil eine allgemeine Gleichung dieser Art die Form $ax + b = cx + d$ hat. Macht die Annahme von $x = s$ die Größe $as + b$ nicht gleich $cs + d$, so wird ein Fehler f statt finden, so daß $as + b - (cs + d) = f$. Ziehen wir hiervon $ax + b - (cx + d)$

$= 0$ ab, so kommt $(a-c)(s-x) = f$. Eine zweite Annahme von $x = s'$, die den Fehler f' nach sich zieht, gibt ähnlicherweise $(a-c)(s'-x) = f'$. Dividiren wir die beiden letztern Resultate durch einander, so erhalten wir $\frac{s-x}{s'-x} = \frac{f}{f'}$, woraus $x = \frac{fs'-f's}{f-f'}$. Hieraus folgende Regel: Multiplicire den ersten Fehler mit der zweiten angenommenen Zahl, und den zweiten Fehler mit der ersten angenommenen Zahl, ziehe die Produkte mit Berücksichtigung der Zeichen der Fehler von einander ab; dividire darauf das Resultat durch die Differenz der beiden Fehler; der Quotient wird die gesuchte Zahl sein. Es ist das die doppelte Regula Falsi, die zur Auflösung von allen Aufgaben vom ersten Grade angewendet werden kann.

III. In der zweiten Aufgabe gab die Positionszahl 1 Stunde das Resultat $\frac{6}{5}$, der Fehler war demnach $+\frac{1}{5}$. Die zweite Positionszahl $\frac{1}{2}$ Stunde gibt das Resultat $\frac{3}{5}$, der Fehler ist also $-\frac{2}{5}$.

Man schreibt diese Zahlen wie hier neben geschehen, multiplicirt die im Kreuz stehenden Zahlen mit einander, und zieht die Produkte von einander ab; man erhält $\frac{1}{10} + \frac{2}{5}$ oder $\frac{1}{2}$; die Differenz der Fehler ist $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}$ oder $\frac{3}{5}$; man dividirt endlich $\frac{1}{2}$ durch $\frac{3}{5}$, woraus $x = \frac{5}{6}$ sich ergibt.

Angenommene Zahlen.		Fehler.
1 Stunde.	+	$\frac{1}{5}$
$\frac{1}{2}$	—	$\frac{2}{5}$

IV. Ein Vater ist jetzt 40 Jahre, sein Sohn 12 Jahre alt; wann ist der Vater dreimal so alt als der Sohn? Man nehme 5 als erste Positionszahl: der Vater ist alsdann 45 Jahre, der Sohn 17 Jahre alt; das Dreifache von 17 gibt 6 mehr als 45. Man nehme 1 als zweite Positionszahl: der Fehler ist —2. Die reciproken Produkte der aus den Positionszahlen entstandenen Fehler geben die Differenz 16; dividirt man dies Resultat durch die Differenz der Fehler, die 8 beträgt, so erhält man zwei als Zahl der Jahre, in denen der Vater dreimal so alt, als der Sohn sein wird.

Angenommene Zahlen.		Fehler.
5 Jahre		6
1	—	2
6	+	10

Werthe eines Kapitals von 1000 fl. von 6 zu 6 Monat, mit Zinseszinsen zu 4, 5 und 6 Procent.

Jahre.	4 pCt.	5 pCt.	6 pCt.	Jahre.	4 pCt.	5 pCt.	6 pCt.
	1020,00	1025,00	1030,00		1515,67	1679,58	1860,29
1	1040,40	1050,63	1060,90	11	1545,98	1721,57	1916,10
	1061,21	1076,89	1092,73		1576,90	1764,61	1973,59
2	1082,43	1103,81	1125,51	12	1604,44	1808,73	2032,79
	1104,08	1131,41	1159,27		1640,61	1853,94	2093,78
3	1126,16	1159,69	1194,05	13	1673,42	1900,29	2156,59
	1148,69	1188,69	1229,87		1706,89	1947,80	2221,29
4	1171,66	1218,40	1266,77	14	1741,02	1996,50	2287,93
	1195,09	1248,86	1304,77		1775,84	2046,41	2356,57
5	1218,99	1280,08	1343,92	15	1811,36	2097,57	2427,26
	1243,37	1312,09	1384,23		1847,59	2150,01	2500,08
6	1268,24	1344,89	1425,76	16	1884,54	2203,76	2575,08
	1293,61	1378,51	1468,53		1922,23	2258,85	2652,34
7	1319,48	1412,97	1512,59	17	1960,68	2315,32	2731,91
	1345,87	1448,30	1557,98		1999,89	2373,21	2813,86
8	1372,79	1484,51	1604,71	18	2039,89	2432,54	2898,28
	1400,24	1521,62	1652,85		2080,69	2493,35	2985,23
9	1428,25	1559,56	1702,42	19	2122,30	2555,68	3074,78
	1456,81	1598,65	1753,51		2164,74	2619,57	3167,03
10	1485,95	1638,62	1806,11	20	2208,04	2685,06	3262,04

Noten zur niedern Algebra.

Note 1 zu §. 6.

Ueber die Rechnungsarten mit einfachen entgegengesetzten Größen.

Die im Text gegebenen Regeln der vier Rechnungsarten sind für die negativen Größen als Theile von Binomen, nicht aber wenn sie ganz einzeln stehen, gefunden worden. Es dürfte daher nicht überflüssig sein, die Sache aus einem und dem andern Gesichtspunkte nochmals zu betrachten.

1) Zwei gleichartige Größen, welche, wenn sie mit einander vereinigt gedacht werden, sich gegenseitig ganz oder zum Theil aufheben, heißen entgegengesetzte Größen; im ersten Falle sagt man, sie haben einen gleichen absoluten (numerischen) Werth; im zweiten, sie haben einen ungleichen absoluten Werth. In einer solchen entgegengesetzten Beziehung stehen zu einander die positiven (additiven) Größen, d. h. mit dem Zeichen $+$ versehenen Größen, und die negativen (subtractiven) Größen, d. h. mit dem Vorzeichen $-$ behafteten Größen. Die Zeichen $+$ und $-$ sind mit den Größen, vor welchen sie stehen, zusammengehörige Dinge, sie sind gleichsam als Adjective bei ihren Subtractiven anzusehen. Positive Größen sind also die Größen, welche zu andern, wenn sie mit ihnen in Verbindung kommen, addirt, während die negativen Größen von andern, mit denen sie in Verbindung kommen, subtrahirt werden sollen.

2) Verbindet man die Größe a mit der Größe $-b$ auf dem Wege der Addition, so wird $a - b$ das Resultat dieser Vereinigung sein, das positiv oder negativ ist, je nachdem $a >$ oder $<$ als b ist. Hieraus ergibt sich, daß eine Addition in der Algebra nicht immer eine wirkliche Vermehrung mit sich bringt, und daß das Wort Summe nicht ganz in demselben Sinne wie in der Arithmetik genommen werden kann.

Der Ausdruck $a - b + c + d - e + f$ ist der nachstehenden Summe $(+a) + (-b) + (+c) + (+d) + (-e) + (+f)$ gleich, er wird deshalb algebraische Summe genannt. — Leicht ist einzusehen, daß $(-a) + (-b) = -(a + b)$.

3) Eine Größe von einer andern subtrahiren, heißt eine Größe (Rest) finden, welche, zum Subtrahend addirt, den Minuend gibt. Soll $-b$ von a subtrahirt werden, so ist Rest $+$ Subtrahend $=$ Minuend, oder

Rest $-b=a$, woraus Rest $=a+b$; d. h. vertausche das Vorzeichen des Subtrahend und addire dann diesen neuen Ausdruck zu dem unveränderten Minuend. Die Subtraction in der Algebra hat also nicht immer eine Verminderung zur Folge.

La Place beweist die Subtractionsregel wie folgt: Setzt man zu einer Größe a die Größe $b-b$ hinzu, die im Grunde nur Null ist, so ändert man den Werth jener Größen nicht; a und $a+b-b$ sind demnach einerlei. Will man nun $+b$ von a subtrahiren, so braucht man in $a+b-b$ nur b wegzulassen, was $a-b$ gibt; will man hingegen $-b$ subtrahiren, so läßt man $-b$ weg, und es bleibt $a+b$.

4) Eine Größe multipliciren, heißt eine Größe (Produkt) finden, welche aus dem Multiplicand eben so gebildet wird, wie der Multiplicator aus der positiven Einheit gebildet ist.

Um zwei Größen mit einander zu multipliciren, multiplicire ihre absoluten Werthe und nimm das Produkt positiv oder negativ, je nachdem die Factoren gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben.

Erster Fall. $(+a)\cdot(+b)=+ab$. Kein weiterer Beweis nöthig.

Zweiter Fall. $(+a)\cdot(-b)=-ab$. $-b$ entsteht aus $+1$ dadurch, daß man das entgegengesetzte von $+1$, d. h. -1 b mal nimmt. Um also das Produkt $+a\cdot -b$ zu bilden, muß man b mal das Entgegengesetzte von $+a$, d. h. b mal $-a$ nehmen, was $-ab$ gibt.

Dritter Fall. $(-a)\cdot(+b)=-ab$. $+b$ entsteht aus $+1$ dadurch, daß man b mal $+1$ nimmt. Um also das Produkt $-a\cdot+b$ zu bilden, muß man $-a$ selbst b mal nehmen, was $-ab$ gibt.

Vierter Fall. $(-a)\cdot(-b)=+ab$. $-b$ entsteht aus $+1$, indem man b mal -1 nimmt. Um also das Produkt $-a\cdot-b$ zu bilden, muß man das Entgegengesetzte von $-a$, d. h. $+a$, b mal nehmen, was $+ab$ gibt.

La Place beweist die Multiplicationsregeln wie folgt: Das Produkt von $a-a$ mit b muß Null sein; da nun das Produkt von a mit $b=+ab$ ist, so muß das Produkt von $-a$ mit b nothwendig $=-ab$ sein, um das Produkt $+ab$ zu vernichten. Folglich muß $-a$ mit $+b$ multiplicirt, $-ab$ geben.

Das Produkt von a mit $b-b$ muß Null sein; da nun das Produkt von a mit $b=+ab$ ist, so muß $+a$ mit $-b$ multiplicirt $=-ab$ sein, um das Produkt ab zu vernichten. $+a$ mit $-b$ multiplicirt gibt folglich $-ab$.

Das Produkt von $-a$ mit $b-b$ muß gleich Null sein; da nun das Produkt von $-a$ mit $+b$ nach dem Vorhergehenden gleich $-ab$ ist, so muß das Produkt von $-a$ mit $-b$ gleich $+ab$ sein, um das erste Produkt zu vernichten. $-a$ mit $-b$ multiplicirt gibt daher $+ab$.

Die Multiplicationsregel läßt sich auch auf folgende Art beweisen:

Man hat $a + (-b) = a - b$
$c \quad = c$,
also auch $ac + c(-b) = ac - bc$,
oder $c \cdot (-b) = -bc$.

Man setze die zwei Gleichheiten:

$$a - b = g \;\ldots\; (1),\quad c - d = k \;\ldots\; (2).$$

Addirt man in der ersten Gleichheit b auf beiden Seiten hinzu, zieht dann successive a und g beiderseits ab, und verfährt man ähnlicherweise mit der Gleichheit (2), so erhält man die zwei Gleichungen:

$$b - a = -g \;\ldots\; (3),\ \text{und}\ d - c = -k \;\ldots\; (4).$$

Multiplicirt man die Gleichungen (1) und (2), und die Gleichungen (3) und (4) Glied für Glied mit einander, so erhält man:

$$ac - bc - da + bd = k \times g,\ \text{und}\ bd - ad - cb + ac = -k \times -g.$$

Da die ersten Theile dieser Gleichungen einerlei sind, so werden es auch die zweiten Theile sein, mithin $k \times g = -k \times -g$. Wird (1) mit (4) und (2) mit (3) Glied für Glied multiplicirt, so findet man, daß $g \times -k = k \times -g$.

Da der Divisor, mit dem Quotienten multiplicirt, den Dividend hervorbringt, so braucht man, um positive und negative Größen durch einander zu dividiren, nur ihre absoluten Werthe durch einander zu dividiren, und den Quotienten positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem der Dividend und Divisor gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben.

Note 2 zu §. 11.

Zusammenstellung der zur Theorie des größten gemeinschaftlichen Theilers gehörigen Sätze.

Die im Texte angeführten Hauptsätze, auf denen die Theorie des größten gemeinschaftlichen Theilers zweier Polynome beruht, sind folgende:

1) Der größte gemeinschaftliche Theiler zweier Polynome ist immer auch ein größter Theiler des Restes, den ihre Division liefert.

2) Der größte gemeinschaftliche Theiler zweier Polynome wird nicht geändert, wenn man das eine durch eine Größe dividirt oder multiplicirt, die keinen gemeinschaftlichen Factor mit dem andern Polynome hat. Dieser Satz erlaubt uns die einem Polynome zugehörigen Factoren, in so fern sie dem andern Polynome nicht gemein sind, ganz ausser Acht zu lassen. Ferner setzt er uns in Stand, die Theilbarkeit rücksichtlich der ersten Glieder jedesmal herzustellen.

3) Der den Polynomen gemeinschaftliche, von dem Ordnungsbuchstaben unabhängige Theiler wird herausgenommen und bei Seite gesetzt. Man findet den vom Ordnungsbuchstaben unabhängigen gemeinschaftlichen Theiler, indem man den größten gemeinschaftlichen Factor aller Coefficienten des einen Polynoms und den aller Coefficienten des andern aufsucht.

4) Das Verfahren, den vom Ordnungsbuchstaben abhängigen Factor zu finden, besteht nun darin, daß man das höhere Polynom durch das andere dividirt, bis das höchste Glied des Restes niedriger als das höchste Glied des Divisors ist; dann den Divisor durch den Rest, diesen Rest durch den zweiten Rest und so fort; nur muß man dafür Sorge tragen, daß die Theilbarkeit der höchsten Glieder bei jedesmaliger Division gelinge.

5) Der bei Seite geschriebene, vom Ordnungsbuchstaben unabhängige, gemeinsame Factor wird mit dem am Ende herauskommenden, vom Ordnungsbuchstaben abhängigen Theiler multiplicirt. Das Produkt wird nun der verlangte Theiler sein. Zur Vervollständigung dieser Lehre, die späterhin uns von Wichtigkeit sein wird, mögen hier noch folgende Sätze stehen.

6) Jedes Polynom ist entweder ein Primpolynom, oder ein Produkt von Primpolynomen oder Primzahlen. Ist ein Polynom kein Primpolynom, so kann man es, in seine Factoren zerlegt, diese abermals in ihre Factoren aufgelöst denken, und dieses so fort, bis man endlich auf solche kommt, die keine weitere Zersetzung zulassen. Daß man endlich, weil keine Brüche vorkommen, auf dergleichen Primfactoren stoßen müsse, läßt sich leicht einsehen.

7) Jeder größte gemeinschaftliche Theiler zweier Polynome ist ein Produkt aller ihrer gemeinsamen Primpolynome. Denn nur dieses Produkt kann die beiden Polynome genau theilen, daß die Quotienten keinen gemeinschaftlichen Factor mehr haben.

8) Hat man überhaupt einen gemeinsamen Factor zweier Polynome erkannt, so schreibt man diesen heraus, und sucht nunmehr zwischen den noch bleibenden Polynomen den größten gemeinschaftlichen Theiler. Am Ende wird dieser Theiler mit den herausgenommenen Factoren multiplicirt.

9) Da das höchste Glied des Ordnungsbuchstaben in den vereinfachten Polynomen bei jeder Subtraction verschwindet, mithin jeder Rest niedrigere Potenzen dieses Buchstaben, als der vorhergehende Rest enthält, so wird man am Ende, wenn die Division nicht eher aufgeht, zu einem Reste gelangen, wo der Ordnungsbuchstabe nicht weiter vorkommt. In diesem letzteren Falle haben die Polynome, wenn jener Rest nicht Null ist, offenbar keinen von dem Ordnungsbuchstaben abhängigen, gemeinschaftlichen Theiler, oder mit andern Worten: die vereinfachten Polynome, in denen die von dem Ordnungsbuchstaben abhängigen Factoren nämlich nicht mehr vorkommen, haben keinen andern gemeinschaftlichen Theiler als die Einheit. Nachstehendes Beispiel wird dies erläutern:

Man soll für

$(9b^2 - 18bc)\,a^3 + (21b^3 - 42b^2c)\,a^2 + (36b^3c - 18b^4)\,a\,(A)$ und
$(15b^2 - 30bc)\,a^2 + (18b^2c - 9b^3)\,a,\ (B)$
den größten gemeinschaftlichen Theiler finden.

Man sieht hier bald, daß $3ab$ ein Bestandtheil des gesuchten Theilers ist. Nach Hinweglassung dieses Factors erhält man

$(A'),\ (3b - 6c)\,a^2 + (7b^2 - 14bc)\,a + 12b^2c - 6b^3,$
$(B'),\ (5b - 10c)\,a + 6bc - 3b^2.$

Der größte gemeinschaftliche Theiler der Coefficienten dieser Polynome ist $b - 2c$; streicht man letzteren Factor in den Polynomen A' und B' weg, so hat man die vereinfachten Polynome

$$3a^2 + 7ba - 6b^2 \text{ und } 5a - 3b.$$

Um die Theilbarkeit der ersten Glieder herzustellen, wird der Dividend mit 5 multiplicirt. Hier folgt die Rechnung:

$$\begin{array}{rrr|l}
15a^2 & +\ 35ba & -\ 30b^2 & 5a - 3b \\
-15a^2 & +\ 9ab & & 3a + 22 \\
\hline
 & 44ab & -\ 30b^2 & \\
 & 2b(22a & -\ 15b) & \\
 & 110a & -\ 75b & \\
 & 110a & +\ 66b & \\
\hline
 & & -\ 9b &
\end{array}$$

Der Factor $2b$ wird weggestrichen und dann mit 5 multiplicirt.

Man findet also für die vereinfachten Polynome den Theiler 1; wird dieser mit den bei Seite gesetzten Factoren $(b - 2c)$ und $3ab$ multiplicirt, so hat man $3ab\,(b - 2c)$ als größten gemeinschaftlichen Theiler der gegebenen Polynome.

Die Zusammenstellung vorstehender Sätze zeigt, daß das angegebene Verfahren, ebenso wie bei Zahlen, stets zum Zweck führt, d. h. daß man durch dasselbe am Ende den größten gemeinschaftlichen Theiler der Polynome findet.

Note 3 zu §. 38.

Eine jede ganzzahlige Potenz von $\sqrt{-1}$ zu bilden.

Auflösung. Der Grad der verlangten Potenz werde durch 4 dividirt, der Rest der Division gibt die gesuchte Potenz. — Bezeichnen wir $\sqrt{-1}$ durch x, so sind sämmtliche gesuchte Potenzen von $\sqrt{-1}$ in folgenden vier Formen enthalten:

$$(\sqrt{-1})^{4n} = x^{4n} = (x^4)^n = (+1)^n = +1.$$
$$(\sqrt{-1})^{4n+1} = x^{4n+1} = x^{4n}\cdot x = +1.\ \sqrt{-1} = +\sqrt{-1}.$$
$$(\sqrt{-1})^{4n+2} = x^{4n+2} = x^{4n}\cdot x^2 = +1\cdot -1 = -1.$$
$$(\sqrt{-1})^{4n+3} = x^{4n}\cdot x^3 = 1\cdot x^2\cdot x = -x = -\sqrt{-1}.$$

Aus diesen Gleichheiten erhellet die Richtigkeit der Auflösung.

Note 4 zu §. 43.

Wenn h in der Potenz a^h so klein, als man nur immer will, werden kann, so wird auch die Potenz der Einheit so nahe kommen können, als man nur immer will. Man setze $h = \frac{1}{z}$ und $a^{\frac{1}{z}} - 1 = \frac{1}{x}$. Die letzte Gleichung gibt $a = \left(\frac{x+1}{x}\right)^z$. So oft nun aber $\frac{x+1}{x}$ mit sich selbst multiplicirt wird, so oft kommt mehr als $\frac{1}{x}$ der Einheit zu dem Produkte. Wird also $\frac{x+1}{x}$ auf die $z$te Potenz erhoben, so ist $\left(\frac{x+1}{x}\right)^z > \frac{x+1}{x} + \frac{z-1}{x} > \frac{x+z}{x}$. Folglich $a > \frac{x+z}{x}$, woraus $\frac{1}{x} < \frac{a-1}{z}$. Da nun z größer als jede noch so große Zahl werden kann, so muß $\frac{1}{x}$ kleiner als irgend eine kleine Größe werden, d. h. der Unterschied zwischen $a^{\frac{1}{z}}$ und 1 kann so klein, als man will, werden.

Note 5 zu §. 43.

Oefters wird $\sqrt{(a+b)}$ mit $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, und $\sqrt{(a-b)}$ mit $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ verwechselt, so verschieden auch diese Ausdrücke sind.

Es ist nämlich:

1) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ größer als $\sqrt{(a+b)}$.

Offenbar ist $a + b + 2\sqrt{ab} > a+b$, oder

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 > a + b$; folglich

$\sqrt{a}+\sqrt{b} > \sqrt{(a+b.)}$

2) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ kleiner als $\sqrt{(a-b)}$, wenn $a>b$ ist. Man hat $a>b$; also $ab>b^2$, oder $\sqrt{ab}>\sqrt{b}$; also auch $2\sqrt{ab}>2b$. Wird auf beiden Seiten dieser Ungleichheit $a-b$ hinzu addirt, so kommt die Ungleichheit $a-b+2\sqrt{ab}>a+b$; woraus, wenn man beiderseits $2\sqrt{ab}$ abzieht, $a-b>a+b-2\sqrt{ab}$; daher $\sqrt{(a-b)}>\sqrt{a}-\sqrt{b}$, was zu beweisen war.

Note 6 zu §. 53.

Auslegung der gebrochenen und negativen Werthe von n bei arithmetischen Progressionen:

I. Aus den Bestimmungsstücken a, d und l habe man für n einen Ausdruck von der Form $p + \frac{q}{m}$ gefunden, wo p eine ganze Zahl und $\frac{q}{m}$

einen ächten Bruch darstellt. In solchem Falle ist l eigentlich kein Glied der Progression, welche a zum ersten Gliede und d zur Differenz hat. Schalten wir aber in dieser Progression zwischen je zwei Glieder $(m-1)$ neue Glieder ein, so wird l dem $[mp-(m-1)+q]$ten Gliede dieser durch Interpolation erhaltenen Progression gleich sein. Bezeichnet d' die Differenz jener neuen Progression, so ist $d' = \frac{l-a}{(p-1)m+q}$, weil dem gefundenen n gemäß $d = \frac{(l-a)m}{(p-1)m+q}$. Da $(p-1)$ $(m-1)$ neue Glieder hinzukommen, so wird die Gesammtzahl der Glieder gleich $p+(m-1)(p-1)$ sein. Nehmen wir in der neuen Progression noch q Glieder weiter hinzu, so ist der Werth x dieses $[mp-(m-1)+q]$ten Gliedes durch die Gleichung $x = a + [mp-(m-1)+q-1] \frac{(l-a)}{(p-1)m+q}$ bestimmt, woraus $x = l$, was zu beweisen war.

Beispiel. Es sei $a = 5$, $l = 15$, $d = 3$, so wird $n = 4\frac{1}{3}$. Schalten wir zwischen je zwei Nachbarglieder zwei neue ein, so ist die Zahl 15, obschon kein Glied der frühern Progression, doch das eilfte Glied der neuen Progression, deren Differenz $= \frac{10}{10} = 1$ ist.

Erhält man aus den gegebenen Stücken a, d und l für n einen ganzen negativen Werth, so sagt ein solcher Ausdruck aus, daß l auf der linken Seite der von a fortgesetzten Progression liege. Die negativen n sind für die rückwärts von a verlängerte Progression gerade das, was die positiven n für die von a vorwärts gehende Progression darstellen. In der That ist die rückwärts fortgesetzte Reihe folgende: $a-d$, $a-2d$, $a-3d$..., deren Glieder offenbar mit den aus der Formel $l = a + (n-1)d$ gewonnenen Ausdrücken, wenn man für n successive die Werthe $0, -1, -2$..., setzt, übereinstimmen.

Beispiel. Es sei $a = 10$, $l = 4$ und $d = 3$; man soll die Stelle des Gliedes 4 finden. Man hat $4 = 10 + (n-1)3$, woraus $n = -1$ folgt, d. h. das Glied 4 steht auf der zweiten Stelle zur Linken von 10, indem 7 die $(1-1)$te oder 0te Stelle, die natürlicherweise mitzählt, einnimmt.

Die auf beiden Seiten fortlaufende Reihe ist hier:

$$\ldots -5,\ -2,\ 1,\ 4,\ \overset{\circ}{7},\ 10,\ 13,\ 16,\ 19 \ldots$$

Ist n negativ und zugleich von der Form $p + \frac{q}{m}$, so wird durch Einschaltung von $(m-1)$ neuen Glieder in der rückwärts fortgesetzten Progression die Stelle des gegebenen Gliedes l gefunden werden.

II. Aus den Bestimmungsstücken s, a, l hat man $n = 2p + \frac{q}{m}$ gefunden. Es zeigt ein solcher Ausdruck, daß s keine eigentliche Summe der vorliegenden Reihe sei. Es kommt jedoch diese Summe heraus, wenn man zur Summe der p ersten Glieder der Progression die Summe der p ersten Glieder der auf l rückwärts folgenden Glieder, sammt dem $\frac{q}{2m}$ten Theile der beiden $(p+1)$ten Glieder hinzu addirt. Bezeichnen wir durch S' die erste und durch S'' die zweite dieser gedachten Summen, so erhalten wir

$$S' = \left(a + a + (p-1)\frac{(l^2 - a^2)}{2s - (a+l)}\right)\frac{p}{2}, \text{ und}$$

$$S'' = \left(l + l - (p-1)\frac{(l^2 - a^2)}{2s - (a+l)}\right)\frac{p}{2}.$$

Ausserdem ist der $\frac{q}{2m}$te Theil des $(p+1)$ten Gliedes der vorwärts genommenen Reihe, den wir x' nennen wollen, $= \left(a + \frac{p(l^2-a^2)}{2s-(a+l)}\right)\frac{q}{2m}$, und x'', derselbe Theil des $(p+1)$ten Gliedes der rückwärtsgehenden Reihe, $= \left(l - \frac{p(l^2-a^2)}{2S-(a+l)}\right)\frac{q}{2m}$.

Wir haben hiernach $S' + S'' + x' + x'' = (a+l)\left(p + \frac{q}{2m}\right)$.

Dem angenommenen n gemäß ist aber $a + l = \frac{2sm}{2pm+q}$; folglich $S' + S'' + x' + x'' = s$, woraus sich die Richtigkeit der Behauptung ergibt.

Beispiel. Es sei $a = 2$, $n = 40$, $s = 154$. Man hat $n = \frac{308}{42} = 7\frac{1}{3}$.

Die vorwärts gehende Reihe ist: 2, 8, 14, 20, 26 . . . . .
Die rückwärts laufende Reihe ist: 40, 34, 28, 22, 16 . . .

Hier ist $s' = 24$ und $s'' = 102$, ferner $x' = 13\frac{1}{3}$ und $x'' = 14\frac{2}{3}$, was in Summe 154 macht. Hat man nämlich $n = 2p - 1 + \frac{q}{m}$ gefunden, so setzt man dafür

$$n = 2p - 2 + \frac{q+m}{m},$$

was einerlei ist.

III. Eine ähnliche Auslegung findet bei den aus der Formel $n = \frac{2l+d}{2d} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{2l+d}{2d}\right)^2 - \frac{2s}{d}\right]}$ gefundenen Werthe von der Form $n = 2p + \frac{q}{m}$ statt.

Beispiel. Es sei $d = 5$, $l = 41$, $s = 189$; man findet $n = q$ oder $8\frac{2}{5}$. Für den Werth $n = 8\frac{2}{5}$ haben wir $a = 4$. Hiernach
die vorwärts laufende Reihe: 4, 9, 14, 19 . . . .
die rückwärts gehende Reihe: 41, 36, 31, 26 . . . .
Wir erhalten $s' = (4+19)\,2 = 46$, und $s'' = 134$; ausserdem $x' = \frac{24}{5}$, und $x'' = \frac{21}{5}$, was die Summe 189 gibt.

Ist n irrational, so kann man auf diesem Wege, wenn anstatt n eine rationale Zahl, die dem irrationalen n sehr nahe liegt, genommen wird, die Summe s beinahe erhalten.

IV. Der negative Werth von $n = \frac{d-2a}{2d} \pm \sqrt{\left[\frac{2s}{d} + \left(\frac{d-2a}{2d}\right)^2\right]}$ verlangt, daß die Reihe auf der linken Seite von a weiter fortgesetzt werde. Es läßt sich darthun, daß wenn $n = -2p$, die Summe der p ersten Glieder der Reihe $a, (a-d), (a-2d)$ . . . . und die Summe der p ersten Glieder der entgegengesetzt laufenden Reihe $l, a-2pd, a-(2p-1)d$... zusammen eine Summe $= s$ geben.

Beispiel. Es sei $a = 5$, $d = 2$, $S = 140$. Die Formel $n = \frac{d-2a}{2d} \pm \sqrt{\left[\frac{2s}{d} + \left(\frac{d-2a}{2d}\right)^2\right]}$ gibt $n = 10$ und $= -14$. l steht also in der 15ten Stelle links von a und ist $= 5 - 2 \cdot 15 = -25$. Die Summe der 7 ersten Glieder der Reihe 5, 3, 1, −1, −3, −5, −7, und die Summe der 7 Glieder der entgegengesetzt laufenden Reihe −25, −23, −21, −19, −17, −15, −13 machen zusammen 140, abgesehen vom Zeichen.

Ist $n = -(2p+1)$, so nimmt l die $(2p+2)$te Stelle ein. In diesem Falle gibt die Summe der p ersten Glieder von l an nach der rechten Seite zu, plus der Summe der p ersten Glieder von a an nach der linken Seite zu, plus dem Mittelgliede der Gesammtreihe eine Summe $= s$.

Beispiel. Es sei $a = 5$, $d = 2$, $s = 77$. Wir erhalten $n = 7$ und $= -11$. l steht in der zwölften Stelle von a und ist gleich −19. Die von a nach der Linken verlängerte Reihe ist folgende:
5, 3, 1, −1, −3, −5, −7, −9, −11, −13, −15, −17, −19.
Die Summe der 5 ersten Glieder 19, 17, 15, 13, 11 nebst der Summe der 5 ersten Glieder −5, −3, −1, 1, 3 plus dem Mittelgliede 7 gibt

die Summe 77. In beiden Fällen also fehlen in der Reihe zwei symmetrisch liegende Glieder.

Hat man $n = -2p - \frac{q}{m}$, so nimmt man ausser den $2p$ erwähnten Gliedern nach den $\frac{q}{2m}$ten Theil der beiden in den $p$ten Stellen von den äussersten Enden a und l stehenden Gliedern, um die gegebene Summe zu erhalten.

Note 7 zu §. 56.

Der Logarithme einer ganzen Zahl ist entweder ganzzahlig oder incommensurabel.

Die vollständigen Potenzen von 10 haben offenbar ganzzahlige Logarithmen. Wir müssen nun darthun, daß die Gleichung $10^{\frac{p}{q}} = z$, wo $\frac{p}{q}$ ein Bruch ist, nicht statt findet, wenn z eine beliebige ganze Zahl bedeutet.

1) z und 10 seien Primzahlen unter sich. Wäre $z = 10^{\frac{p}{q}}$, so würde man, wenn man beiderseits auf die $q$te Potenz erhebt, $10^p = z^q$ erhalten; woraus $10^{p-1} = \frac{z^q}{10}$, was unmöglich ist.

2) Es sei $z = 2^r$ oder 5^r. Wäre z. B. $2^r = (10)^{\frac{p}{q}}$, dann auch $2^{rq} = 10^p$, was ebenfalls unmöglich ist.

3) Es sei $z = 2^r \cdot n$ oder $= 5^r \cdot n$; n und 10 sind Primzahlen unter sich. Hätte man z. B. $10^{\frac{p}{q}} = 2^r \cdot n$; dann auch $10^p = 2^{rq} \cdot n^q$; woraus $\frac{10^p}{n^q} = 2^{rq}$, was ungereimt ist.

4) Es sei $z = 2^r \times 5^t \times n$, oder $= 2^r \times 5^t$, wo n und 10 Primzahlen unter sich sind. Es kann $10^{\frac{p}{q}}$ nicht gleich $2^r \times 5^t \times n$ sein, weil hieraus $10^p = 2^{rq} \times 5^{tq} \times n^q$, oder $\frac{10^p}{n} = 2^{rq} \times 5^{tq} \times n^{q-1}$ folgte, d. h. ein Bruch gleich einer ganzen Zahl sein müßte. Die Gleichung $z = 10^{\frac{p}{q}}$ ist also in keinem Falle zuläßig.

Die Logarithmen der Brüche 0,1; 0,01 .... sind negative ganze Zahlen. Dagegen sind die Logarithmen der übrigen Brüche, sie mögen

ächt oder unächt sein, incommensurabel. Wäre log.$(\frac{a}{b}) = n$, wo n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, so hätte man $\frac{a}{b} = 10^n$, was unmöglich ist. Man kann auch nicht $\frac{a}{b} = 10^{\frac{p}{q}}$ setzen, $\frac{p}{q}$ mag positiv oder negativ sein, weil dann $\left(\frac{a}{b}\right)^q = 10^p$ wäre. — Also können nur die Logarithmen von den Zahlen 1, 10, 100.... und die von den Brüchen 0,1; 0,01; 0,001.... genau erhalten werden.

Note 8 zu §. 57.

Zu zeigen, wie es möglich ist, die Logarithmen der ganzen Zahlen zu finden.

Wir wollen annehmen, daß der Log. 2 gesucht werden soll. Man setze $10^x = 2$. Man sieht, daß x zwischen 0 und 1 liegt; man schreibe daher $x = \frac{1}{z}$, woraus $10^{\frac{1}{z}} = 2$, oder $10 = 2^z$. Da z zwischen 3 und 4 liegt, so setze man $z = 3 + \frac{1}{z'}$. Man erhält dann $10 = 2^{3 + \frac{1}{z'}} = 8 \times 2^{\frac{1}{z'}}$, oder $\frac{5}{4} = 2^{\frac{1}{z'}}$, oder $2 = \left(\frac{5}{4}\right)^{z'}$. Man findet, daß z' zwischen 3 und 4 fällt, also $z' = 3 + \frac{1}{z''}$. Hiernach wird $2 = \left(\frac{5}{4}\right)^3 \times \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{z''}}$, woraus $\left(\frac{128}{125}\right)^{z''} = \frac{5}{4}$. Man findet durch Probiren, daß $z'' = 9 + \frac{1}{z'''}$ ist.

Bleiben wir bei dieser Annäherung stehen, die man nach Belieben weiter fortsetzen kann, so erhalten wir durch successive Substitution der gefundenen Werthe: $z' = \frac{28}{9}$, $z = \frac{93}{28}$, $x = \frac{28}{93}$. Wir haben demnach annähernd log. $2 = \frac{28}{93} = 0{,}30107$, ein Werth, der bis auf die vierte Ziffer genau ist, da der bis auf 7 Decimalstellen berechnete 0,3010300 macht.

Erhebt man also die Zahl 10 zu einer Potenz vom Grade 3010300 und zieht aus dem Resultate die Wurzel vom Grade 10000000, so erhält man eine Zahl, welche beinahe gleich 2 ist.

Diese Methode zur Berechnung der Logarithmen ist zwar weniger langwierig als die in der Arithmetik angegebene, jedoch ist sie noch äusserst mühsam; auch sind die Logarithmen auf diesem Wege nicht berechnet worden. Einfachere Mittel zu ihrer Bestimmung werden später vorkommen.

Bemerkt mag noch werden, daß man die Logarithmen aller zusammengesetzten Zahlen leicht finden kann, wenn man die Logarithmen der Primzahlen bestimmt hat.

Note 9.

Einiges von den höhern arithmetischen Progressionen.

Wenn man in einer Reihe von Gliedern a, b, c, d u. s. w. die Unterschiede $b-a$, $c-b$ u. s. w. der nächst auf einander folgenden Glieder bildet, so machen die auf diese Art erhaltenen Größen die erste Differenzenreihe aus. Nimmt man in dieser ersten Differenzenreihe abermals die Unterschiede der auf einander folgenden Glieder $c-b-(b-a)$, $d-c-(c-b)$ u. s. w.; so bilden diese Unterschiede die zweite Differenzenreihe. Auf dieselbe Art wird die dritte, vierte u. s. w. Differenzenreihe der ursprünglichen oder Hauptreihe abgeleitet. Gelangt man auf solche Art auf eine aus lauter gleichen Gliedern bestehende $n$te Differenzenreihe, so heißt die Hauptreihe eine arithmetische Progression der höhern Ordnung und zwar von der $n$ten Ordnung. Die im §. 52 betrachteten arithmetischen Reihen sind also hiernach arithmetische Reihen der ersten Ordnung.

Die Quadrate der natürlichen Zahlen bilden eine arithmetische Reihe der zweiten Ordnung. In der That sind sämmtliche ganze Zahlen in den Formeln $3n$, $3n+1$, $3n+2$ enthalten. Bilden wir die Quadrate dieser Ausdrücke, die erste und zweite Differenzenreihe derselben, so entsteht folgende Tabelle:

Zahlen.	Quadrate.	1te Differenzenreihe.	2te Differenzenreihe.
$3n$	$9n^2$		
$3n+1$	$9n^2+6n+1$	$6n+1$	
$3n+2$	$9n^2+12n+4$	$6n+3$	2.

Aus dieser Zusammenstellung ergibt sich, daß die zweite Differenz $=2$ ist, welche drei auf einander folgende Quadrate man übrigens auch betrachten mag.

Die dritten Potenzen der natürlichen Zahlen bilden eine arithmetische Progression der dritten Ordnung. Bilden wir die Cuben der vier beliebig auf einander folgenden Zahlen $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$, sammt der ersten, zweiten und dritten Differenzenreihe jener Cuben, so erhält man folgende Darstellung:

Zahlen.	Cuben.	1te Differenzenreihe.	2te Differz.	3te Differz.
$4n$	$64n^3$			
$4n+1$	$64n^3+48n^2+12n+1$	$48n^2+12n+1$		
$4n+2$	$64n^3+96n^2+48n+8$	$48n^2+36n+7$	$24n+6$	6
$4n+3$	$64n^3+144n^2+108n+27$	$48n^2+60n+19$	$24n+12$	

Die dritte Differenz bleibt also dieselbe für alle Werthe von n.

Wir werden später sehen, daß die $m$ten Potenzen der Reihe 1^m, 2^m, 3^m, 4^m .... eine arithmetische Progression der $m$ten Ordnung bilden, deren $m$te Differenz $= 1 \times 2 \times 3 \times \ldots m$, wo m eine ganze Zahl darstellt.

Note 10.

Die Summe der Quadrate und Cuben der in einer arithmetischen Reihe stehenden Zahlen zu finden:

Es sei die arithmetische Reihe $a, b, c \ldots i, k, l$; die constante Differenz werde wie gewöhnlich durch d dargestellt. Der Natur der Progression zufolge haben wir $b = a + d$, $c = b + d \ldots l = k + d$.

Erheben wir diese Gleichungen beiderseits aufs Quadrat, auf den Cubus und auf die vierte Potenz, so erhalten wir folgende Systeme von Gleichungen:

I.

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + 2ad + d^2 \\ c^2 &= b^2 + 2bd + d^2. \\ &\vdots \\ l^2 &= k^2 + 2kd + d^2. \end{aligned}$$

II.

$$\begin{aligned} b^3 &= a^3 + 3a^2d + 3ad^2 + d^3. \\ c^3 &= b^3 + 3b^2d + 3bd^2 + d^3. \\ &\vdots \\ l^3 &= k^3 + 3k^2d + 3kd^2 + d^3. \end{aligned}$$

III.

$$\begin{aligned} b^4 &= a^4 + 4a^3d + 6a^2d^2 + 4ad^3 + d^4. \\ c^4 &= b^4 + 4b^3d + 6b^2d^2 + 4bd^3 + d^4. \\ &\vdots \\ l^4 &= k^4 + 4k^3d + 6k^2d^2 + 4kd^3 + d^4. \end{aligned}$$

1) Addiren wir die Gleichungen des ersten Systems Glied für Glied, so haben wir nach Hinweglassung der gemeinschaftlichen Glieder und Versetzung von a^2 in den ersten Theil:

$$l^2 - a^2 = 2d(a + b + c + \ldots\ i + k) + (n - 1)\, d^2, \text{ oder}$$
$$l^2 - a^2 = 2d\,(S_1 - l) + (n-1)d^2,$$

wenn S_1 die Summe der n Glieder der arithmetischen Reihe bedeutet. Hieraus folgt

$$S_1 = \frac{(l^2 - a^2) - (n-1)d^2 + 2ld}{2\,d};$$

setzt man für l seinen Werth, so kommt

$$S_1 = \frac{n[2a + (n-1)d]}{2} = \frac{d}{2}\; n^2 + \frac{2a - d}{2}\; n.$$

2) Addiren wir ebenso die Gleichungen des zweiten Systems zu einander, so erhalten wir

$$l^3 - a^3 = 3d(a^2 + b^2 + \ldots + k^2) + 3d^2(a + b + \ldots + k) + (n-1)d^3, \text{ oder}$$

$l^3 - a^3 = 3d(S_2 - l^2) + 3d^2(S_1 - l) + (n-1)d^3$, wenn wir durch S_2 die Summe der Quadraten $a^2 + b^2 + \ldots + k^2 + l^2$ darstellen. Hieraus entnehmen wir, wenn für S_1 dessen Werth substituirt wird,

$$S_2 = \frac{2l^3 - 2a^3 + 3dl^2 + 3da^2 + (n-1)d^3}{6d}, \text{ oder}$$

$$S_2 = \frac{d^2}{3} n^3 + \frac{d(2a-d)}{2} n^2 + \frac{6a^2 - 6ad + d^2}{6} n.$$

3) Die Gleichungen des dritten Systems geben ähnlicherweise, wenn wir durch S_3 die Summe der Cuben der Glieder der Reihe bezeichnen,
$l^4 - a^4 = 4d(S_3 - l^3) + 6d^2(S_2 - l^2) + 4d^3(S_1 - l) + (n-1)d^4$; woraus

$$S_3 = \frac{l^4 - a^4 + (2l^3 + 2a^3)d + (l^2 - a^2)d^2}{4d}, \text{ oder}$$

$$S_3 = \frac{d^3}{4} \cdot n^4 + d^2 \cdot \frac{(2a-d)}{2} n^3 + \frac{d(6a^2 - 6ad + d^2)}{4} n^2 + \frac{2a^3 - 3a^2 d + ad^2}{2} n.$$

Wollen wir die Summe der Quadrate und die der Cuben der n natürlich auf einander folgenden Zahlen bestimmen, so ist $d = a = 1$ und es ergibt sich $S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ und $S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

4) Fahren wir fort auf ähnliche Weise zu schließen, so werden wir die erforderlichen Gleichungen erhalten, um nach und nach die vierten, fünften u. s. w. Potenzen der in arithmetischer Reihe stehenden Zahlen zu berechnen. Zur Bestimmung der Summe $S(m-1)$ der $(m-1)$ten Potenzen der Zahlen einer arithmetischen Reihe finden wir sonach $l^m - a^m = md(S_{m-1} - l^{m-1}) + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} d^2(S_{m-2} - l^{m-2}) + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(S_{m-3} - l^{m-3}) +$ u. s. w., wo die Summen $S_1, S_2, S_3 \ldots S_{m-2}$ als bekannt zu betrachten sind.

Note 11.

Die Summe der n ersten Glieder einer Reihe zu finden, die entsteht, wenn man eine geometrische Progression und eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung Glied für Glied mit einander multiplicirt.

Die Form einer solchen Reihe ist:
$ba, (b+d)aq, (b+2d)aq^2, \ldots [b+(n-1)d]aq^{n-1}$, wo $a : aq : aq^2 \ldots aq^{n-1}$ die geometrische, und $b \cdot b + d \cdot b + 2d \ldots b + (n-1)d$ die arithmetische Reihe darstellt. Heißt S die gesuchte Summe, so hat man sogleich $S = \frac{ab(q^n - 1)}{q-1} + daq[1 + 2q + 3q^2 + \ldots + (n-1)q^{n-2}]$.

Es handelt sich also nur darum, die Summe $s' = 1 + 2q + 3q^2 + \ldots.$ $+ (n-1)\,q^{n-2}$ zu finden. Wir haben, wenn mit q multiplicirt wird: $s'q = q + 2q^2 + \ldots.\ (n-1)\,q^{n-1}$; also $s'(q-1) = (n-1)\,q^{n-1} -$ $(1+q+\ldots.+q^{n-2})$. Folglich $s' = \frac{(n-1)q^{n-1}}{q-1} - \frac{q^{n-1}-1}{(q-1)^2}$; hieraus

$$S = \frac{ab\,(q^n-1)}{q-1} + \frac{daq}{q-1}\left([n-1]q^{n-1} - \frac{q^{n-1}-1}{q-1}\right).$$

Ist q ein ächter Bruch, so erhält man für $n = \frac{1}{0}$

$$S = \frac{ab}{1-q} + \frac{daq}{(1-q)^2}.$$

Note 12.

Die Summe der n ersten Glieder folgender Reihe: $ab, (2b+d)aq, (3b+3d)aq^2, \ldots \left[nb + \frac{n(n-1)d}{1\cdot 2}\right] aq^{n-1}$ zu finden, die aus der Multiplication Glied für Glied einer geometrischen Progression $a : aq : aq^2 \ldots.\ aq^{n-1}$ mit einer arithmetischen Reihe der zweiten Ordnung $b \cdot 2b + d \cdot 3b + 3d \cdot 4b + 6d \ldots.\ nb + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}d$ entstanden ist.

Man hat sogleich

$$S = ab\left[\frac{nq^n}{q-1} - \frac{q^n-1}{(q-1)^2}\right] + adq\,(1 + 3q + 6q^2 \ldots).$$

Setzt man nun $S' = 1 + 3q + 6q^2 + \ldots.$, so hat man auch

$$S'q = q + 3q^2 + 6q^3 + \ldots.,\ \text{also}$$

$$S'(q-1) = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,q^{n-1} - [1 + 2q + 3q^2 + \ldots. + (n-1)\,q^{n-2}],$$

oder $S'(q-1) = \frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2}\,q^{n-1} - \left[\frac{(n-1)q^{n-1}}{q-1} - \frac{q^{n-1}-1}{(q-1)^2}\right]$; daher:

$$S' = \frac{n(n-1)\,q^{n-1}}{2(q-1)} - \frac{(n-1)\,q^{n-1}}{(q-1)^2} + \frac{q^{n-1}-1}{(q-1)^3};\ \text{folglich:}$$

$$S = ab\left[\frac{nq^n}{q-1} - \frac{q^n-1}{(q-1)^2}\right] + adq\left[\frac{n(n-1)q^{n-1}}{2(q-1)} - \frac{(n-1)q^{n-1}}{(q-1)^2} + \frac{q^{n-1}-1}{(q-1)^3}\right].$$

Ist q ein ächter Bruch, so erhält man für $n = \frac{1}{0}$

$$S = \frac{ab}{(q-1)^2} + \frac{adq}{(q-1)^3}.$$

Inhalt des zweiten Buches.

(Niedere Algebra.)

Erstes Kapitel.

Von den algebraischen Rechnungsarten.

	Seite
Allgemeine Begriffe	3
Reduction	5
Addition	5
Subtraction	5
Multiplication	7
Division	11
Brüche	16
Gemeinschaftlicher Theiler	16

Zweites Kapitel.

Von den Gleichungen des ersten Grades.

Gleichungen vom ersten Grade mit einer Unbekannten	23
Bemerkungen über die Gleichungen des ersten Grades	33
Gleichungen vom ersten Grade mit mehreren Unbekannten	37
Von den Ungleichheiten	47
Unbestimmte Aufgaben	50
Alligationsrechnung	51

Drittes Kapitel.

Von den Potenzen, den Wurzeln und Gleichungen des zweiten Grades.

Potenzen und Wurzeln der Monome	64
Negative und gebrochene Exponenten	69

	Seite
Quadrat- und Cubikwurzel der Polynome	74
Gleichungen des zweiten Grades	81

Viertes Kapitel.

Von den Verhältnissen und Anwendung derselben auf praktische Rechnungen.

Proportionen	89
Arithmetische Progressionen	90
Geometrische Progressionen	92
Logarithmen	94
Zinsrechnung	102
Rentenrechnung	103
Rabattrechnung	106
Regula Falsi	107
Tafel	109
Noten	111

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Francoeur, Louis Benjamin,

Vollständiger Lehrkurs der reinen Mathematik

Bd.: 1. Band 2. Buch

1843

Coburg, Landesbibliothek -- Cas A 3580(1)#1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11928695-8